

Beobachtungsunsicherheit und topologische Relationen

Stephan Winter

Institut für Photogrammetrie, Universität Bonn

Stephan.Winter@ipb.uni-bonn.de

Rostock, 7.-8. Oktober 1996

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird eine Methode zur Bestimmung der topologischen Relationen zwischen zwei in ihrer Lage unsicheren Regionen vorgestellt. Die Bestimmung basiert auf den Extremwerten einer Abstandsfunktion entlang eines Skeletts durch unsichere Schnittmengen zwischen den Regionen. Mit einer solchen Repräsentation vertiefen wir die Relationskonzepte der 9-Intersektion, indem wir über topologisch invariante Merkmale hinaus auch metrische Information erhalten, um sie zur Unsicherheit in Bezug zu setzen.

Die Beobachtung der Abstände wird hier statistisch modelliert. Mit einer Bayes-Klassifikation erhalten wir Abstandsklassen, aus denen wir auf die topologische Relation zurückschließen und deren Wahrscheinlichkeit wir so angeben können.

1 Einführung

Beobachtungen sind stets mit Unsicherheit behaftet. Daher sind raumbezogene Daten in Geo-Informationssystemen (GIS) stets unsicher. Jede räumliche Analyse ist davon beeinflusst. Es ist also notwendig, die Fortpflanzung von Unsicherheit in allen Operationen mitzumodellieren, um die Qualität von Ergebnissen beurteilen zu können. In diesem Beitrag kombinieren wir die Beobachtungsunsicherheit mit einem mathematischen Modell qualitativer räumlicher Relationen. Wir stellen ein statistisches Entscheidungsverfahren über topologische Relationen zwischen in ihrer Lage unsicheren Objekten vor.

Werden räumliche Relationen zwischen in ihrer Lage unsicheren Objekten bestimmt, muß man unterscheiden zwischen quantitativen Relationen, die *ungenau* werden, und qualitativen Relationen, die *unsicher* werden. Topologische Relationen, die qualitativ sind, können unter Lageunsicherheit wahr oder falsch sein. Werden z. B. zwei unabhängige Objekte verschnitten und bilden kleine Schnittpolygone, dann stellt sich die Frage, ob beide Objekte in der realen Welt überlappend sind oder auch benachbart sein könnten. Zur Entscheidung

ist in geeigneter Weise das Maß an Überlappung mit der Größe der Lageunsicherheit in Verbindung zu setzen.

Als Beobachtung zur Charakterisierung der topologischen Relation werden wir eine *morphologische Abstandsfunktion* einführen, deren Extremwerte wir registrieren. Mit solchen Beobachtungen gehen wir über topologisch invariante Merkmale hinaus. Wir übertragen die geometrische Unsicherheit dieser Beobachtungen auf die Unsicherheit der topologischen Relation durch eine statistische Modellierung des Beobachtungsprozesses und eine wahrscheinlichkeitsbasierte Entscheidungsregel.

Durch die starke Verknüpfung mit dem Beobachtungsprozeß stellen wir eine wertvolle Entscheidungsmethode vor, deren statistische Grundlage eine Beurteilung und eine Fortpflanzung in weiteren räumlichen Analysen erlaubt.

2 Grundlagen und verwandte Arbeiten

2.1 Unsicherheit von Objekten und Relationen

Bekannte Ideen zum Umgang mit Lageungenauigkeit räumlicher Objekte in GIS sind hauptsächlich auf Bandmodelle oder auf unscharfe Mengen (*fuzzy sets*) beschränkt. Mit diesen Modellen sind auch räumliche Beziehungen ermittelt worden. Statistische Modelle dagegen sind in GIS bisher wegen ihrer Komplexität unbekannt.

Ersetzt man lineare Ränder von Regionen durch zweidimensionale Bänder, erhält man eine diskrete Repräsentation der Lageunsicherheit. Dabei sind sowohl Bänder konstanter Breite, sogenannte ε -Bänder (Perkal 1956, Chrisman 1982), als auch Bänder variabler Breite, sogenannte Fehlerbänder, bekannt (Caspary und Scheuring 1992).

Zweidimensionale Ränder zerstören die topologischen Eigenschaften von Mengen im euklidischen Raum (vgl. Egenhofer und Sharma 1993). Daher sind sie höchstens geeignet, um fiktive diskrete *Zwischenrelationen* zu erzeugen (Clementini und Di Felice 1996). Für eine weitere Beurteilung sind solche diskreten Ergebnisse zu schwach.

Mit Hilfe eines ε -Bands leitet Wazinski *graduierte* topologische Relationen ab (Wazinski 1993). Die Gewichte beruhen auf der relativen Größe von Schnittmengen. Sein Modell ist allerdings sowohl geometrisch als auch in der Aussage stark beschränkt, da nicht für jede Schnittmenge die Größe in einem Zusammenhang mit ihrer Sicherheit steht.

Kraus und Haussteiner berechnen eine Karte, die für jeden Punkt angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit er innerhalb eines Polygons liegt (Kraus und Haussteiner 1993). Im Prinzip erhalten sie hyperbolische Isolinien um Regionenränder. Auf räumliche Beziehungen ist diese Idee nicht angewandt worden.

Die zweite Art, Unsicherheit zu repräsentieren, besteht in der Interpretation von Regionen als zweidimensionale unscharfe Mengen (Zadeh 1965). Molenaar zeigt Ansätze, damit unscharfe topologische Relationen zu bestimmen (Molenaar 1994). Man hat hier, neben der

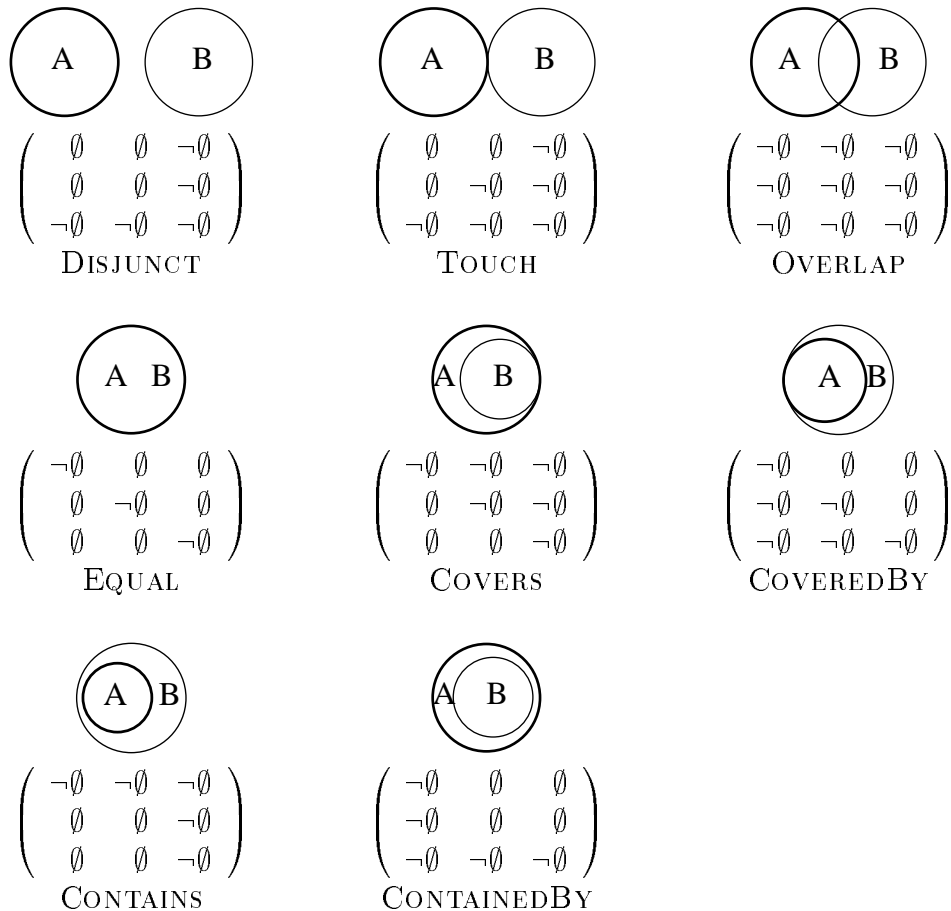
Aufgabe, unscharfe Zugehörigkeitsmaße zu definieren, die Schwierigkeit, das Unschärfe-
maß einer Relation zu interpretieren.

2.2 Repräsentation von topologischen Relationen

Zur Repräsentation topologischer Relationen stützen wir uns auf die *9-Intersektion* von Egenhofer (Egenhofer und Herring 1990, Egenhofer und Franzosa 1991). Ganz kurz sei hier das Prinzip wiederholt.

Die 9-Intersektion ist ein Schema der neun Schnittmengen zwischen den Inneren ($^{\circ}$), den Rändern (∂) und den Äußeren (c) zweier räumlicher Objekte, wobei allein das Leersein oder Nichtleersein der Schnittmengen registriert wird. Für einfach zusammenhängende, regulär geschlossene Regionen (Worboys und Bofakos 1993) im \mathbb{R}^2 lassen sich genau acht 9-Intersektionen unterscheiden (Tab. 1). Räumliche Objekte mit anderen topologischen Eigenschaften haben mehr topologische Relationen (Egenhofer und Herring 1991).

Tabelle 1: Die acht topologischen Beziehungen, die für einfache Regionen mit der 9-Intersektion unterschieden werden können.



Wir beschränken uns zunächst auf den einfachsten Fall. Dann besteht die Menge der topologischen Relationen Ω_R aus:

$$\Omega_R = \{\text{DISJUNCT, TOUCH, OVERLAP, COVERS, COVEREDBY, EQUAL, CONTAINS, CONTAINEDBY}\} \quad (1)$$

Diese Relationenmenge kann in einem planaren Graphen, dem *conceptual neighborhood graph* (CNG), angeordnet werden. Die Kanten des Graphen folgen aus der Betrachtung von gegenseitigen Bewegungen oder Deformationen der betrachteten Objekte (Egenhofer und Al-Taha 1992). Zusätzlich können die Kanten des Graphen gerichtet werden. Dazu ziehen wir das Konzept der *Dominanz* von Relationen heran (Galton 1994, Winter 1994).

Definition (Dominanz): Wir nennen eine Relation *dominant* gegenüber im Graphen benachbarten Relationen, falls sie in irgendeiner kontinuierlichen Bewegung oder Deformation der Objekte nur zu einem Zeitpunkt gilt.

Die Richtung einer Kante definieren wir von der dominanten Relation zu den dominierten Relationen. Dann zeigt Abb. 1 den Graphen, mit einer zusätzlichen Erweiterung aus dem Abschnitt 3.

Da die 9-Intersektion nur topologische Invarianten enthält, ist sie nicht geeignet, um den Einfluß von Lageunsicherheit der beteiligten Objekte zu quantifizieren. Daher ersetzen wir diese Repräsentation im folgenden Abschnitt (3) durch Merkmale aus einer Abstandsfunktion. Wir werden die Relationen der 9-Intersektion beibehalten, aber zusätzlich metrische Informationen erhalten. Danach werden wir im Abschnitt 4 die Beobachtung dieser Merkmale statistisch modellieren und die topologische Relation klassifizieren.

3 Beobachtungen für topologische Relationen

3.1 Relationengruppen

Für die Lageungenauigkeit stellen wir zwei Restriktionen auf:

1. Die Unsicherheit über die Lage einer Region soll *klein sein* gegenüber ihrer Ausdehnung.
2. Die Unsicherheit über die Zugehörigkeit eines Punkts zu einer Region soll sich stets auf *ein* zusammenhängendes Randsegment beziehen (die Region soll hinreichend kompakt und glatt berandet gegenüber der Lageunsicherheit sein).

In geodätischen Kontexten sind diese Restriktionen in der Regel erfüllt. So haben z. B. Objekte im Liegenschaftskataster Ausdehnungen von Metern oder Dekametern, werden aber auf Zentimeter genau aufgenommen.

Mit diesen Restriktionen begründen wir eine Teilung des Graphen in zwei zusammenhängende Subgraphen, beziehungsweise eine Teilung des Raums der topologischen Relationen, Ω_R , in zwei Relationengruppen C^1 , C^2 (Abb. 1).

Definition (Relationengruppen): Wir nennen die Menge topologischer Relationen, die aus TOUCH und ihren Nachbarn besteht, die Relationengruppe C^1 :

$$C^1 = \{\text{DISJUNCT}, \text{TOUCH}, \text{WEAKOVERLAP}\}$$

Wir nennen die Menge topologischer Relationen, die aus EQUAL und ihren Nachbarn besteht, die Relationengruppe C^2 :

$$C^2 = \{\text{STRONGOVERLAP}, \text{COVERS}, \text{COVEREDBY}, \\ \text{CONTAINS}, \text{CONTAINEDBY}, \text{EQUAL}\}$$

Beide Gruppen sind um eine dominante Relation zentriert (TOUCH bzw. EQUAL) und enthalten deren sämtliche Nachbarn. Dazu haben wir offensichtlich die zentrale Relation OVERLAP in zwei Ausprägungen aufgeteilt, in WEAKOVERLAP und STRONGOVERLAP. Das Gewicht der Relation OVERLAP wird über einen *Überlappungsfaktor* OF definiert:

$$OF = \frac{|\mathcal{A}^\circ \cap \mathcal{B}^\circ|}{\min(|\mathcal{A}^\circ|, |\mathcal{B}^\circ|)} \quad (2)$$

Damit wird einfach gesetzt:

$$\begin{aligned} \text{REL} = \text{WEAKOVERLAP} & : \quad OF \leq 0.5 \\ \text{REL} = \text{STRONGOVERLAP} & : \quad OF > 0.5 \end{aligned}$$

Die Idee, die Relation OVERLAP aufzuteilen, beruht auf der Eigenschaft, daß eine Lageunauigkeit der beteiligten Objekte bei einem Überlappungsfaktor in der Nähe von 0.5 die Relation OVERLAP in keiner Weise gefährdet, wohingegen bei sehr kleinem oder sehr großem Überlappungsfaktor auch andere Relationen wahrscheinlich werden.

3.2 Ternäres Skelett und Abstandsfunktion

Wenn die beobachtete Relation zwischen zwei Regionen \mathcal{A} and \mathcal{B} aus C^1 stammt, dann sind durch deren Lageunauigkeit die Schnittmengen $\mathcal{A}^\circ \cap \mathcal{B}^\circ$ und $\partial\mathcal{A} \cap \partial\mathcal{B}$ unsicher; alle übrigen Schnittmengen sind dazu redundant. Und umgekehrt gilt, wenn die beobachtete Relation aus C^2 stammt, dann sind die Schnittmengen $\mathcal{A}^\circ \cap \mathcal{B}^c$, $\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^\circ$ und $\partial\mathcal{A} \cap \partial\mathcal{B}$ unsicher; alle übrigen Schnittmengen sind dazu redundant. Wir müssen also jeweils nur über die genannten Schnittmengen entscheiden.

Auf dem Wege zu metrischen Merkmalen anstelle leerer oder nichtleerer Schnittmengen definieren wir deshalb nun für jede Relationengruppe drei *Zonen* \mathcal{O} , \mathcal{P} und \mathcal{Q} auf folgende

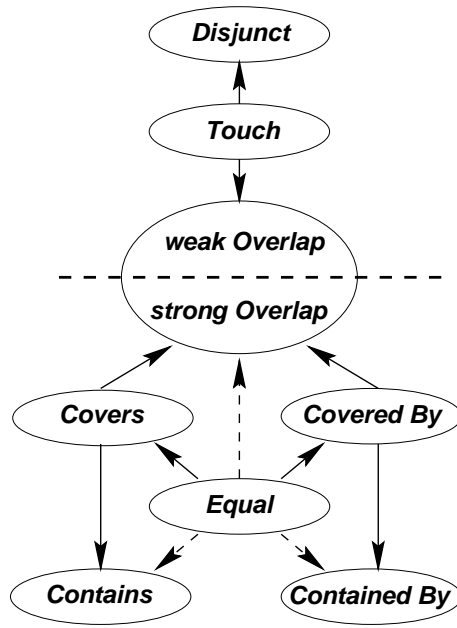


Abbildung 1: Der *conceptual neighborhood graph*, aufgeteilt in zwei Subgraphen um TOUCH und um EQUAL.

Weise:

$$\text{REL} \in C^1 : \quad \begin{cases} \mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}, \mathcal{Q} \\ \mathcal{P} = \mathcal{A}^\circ \cap \mathcal{B}^c \\ \mathcal{Q} = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^\circ \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{REL} \in C^2 : \quad \begin{cases} \mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}, \mathcal{Q} \\ \mathcal{P} = \mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}^c \\ \mathcal{Q} = \mathcal{A}^\circ \cap \mathcal{B}^\circ \end{cases} \quad (4)$$

Jede Zone ist eine offene Menge. Die Zonen sind so definiert, daß \mathcal{P} und \mathcal{Q} jeweils in ihrer Relationengruppe sichere Schnittmengen enthalten.

Für diese Zonen ziehen wir das Konzept des *Zonenskeletts* heran (Lantuejoul 1978). Zur Skeletierung setzen wir die Zonen \mathcal{P} und \mathcal{Q} als Vordergrund \mathcal{X} und \mathcal{O} als Hintergrund $\overline{\mathcal{X}^c}$. — Ein *Skelett* $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ einer abgeschlossenen Menge \mathcal{X} ist bekanntlich definiert durch die Menge von Mittelpunkten maximaler Kreise, die ganz innerhalb einer geschlossenen Menge \mathcal{X} liegen (Serra 1982). Als *Exoskelett* bezeichnen wir das Skelett durch die Menge $\mathcal{S}(\overline{\mathcal{X}^c})$.

Definition (Zonenskelett): Ein (ternäres) Zonenskelett ist diejenige Untermenge eines Exosketts zwischen disjunkten Zonen \mathcal{P} und \mathcal{Q} , dessen maximale Kreise gleichzeitig \mathcal{P} und \mathcal{Q} berühren.

Mit den zwei verschiedenen Initialisierungen für \mathcal{P} und \mathcal{Q} (Gl. 3, 4) unterscheiden wir die Zonenskelette \mathcal{S}^1 ($\text{REL} \in C^1$) und \mathcal{S}^2 ($\text{REL} \in C^2$). In jedem Fall ist ein Zonenske-

lett eine endliche Menge einfacher Linien (Lantuejoul 1978), wobei weder \mathcal{S}^1 noch \mathcal{S}^2 zusammenhängend sein müssen.

3.3 Abstandsmerkmale für topologische Relationen

Mit Hilfe des Zonenskeletts führen wir nun eine Abstandsfunktion zwischen den Zonen \mathcal{P} und \mathcal{Q} ein. Dazu benutzen wir den Durchmesser d der maximalen Kreise an jedem Punkt s des Skeletts \mathcal{S}^i , $i \in \{1, 2\}$. Die Funktion gibt dann den Durchmesser unsicherer Schnittmengen entlang des Skeletts an.

Definition (Morphologische Abstandsfunktion): Wir nennen eine Funktion $\vartheta_{\mathcal{AB}}(s)$ zwischen zwei Regionen \mathcal{A} und \mathcal{B} mit den folgenden Eigenschaften die *morphologische Abstandsfunktion*:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{AB}}(s) &= d && \text{falls } s \in \mathcal{A}^c \\ \vartheta_{\mathcal{AB}}(s) &= -d && \text{falls } s \in \mathcal{A}^\circ \\ \vartheta_{\mathcal{AB}}(s) &= 0 && \text{falls } s \in \partial\mathcal{A} \end{aligned}$$

mit $s \in \mathcal{S}^i$, $i \in \{1, 2\}$, und $d \in \mathbb{R}^+$.

Name und Vorzeichen der morphologischen Abstandsfunktion sind angelehnt an die morphologischen Operationen *Dilatation* (\oplus) und *Erosion* (\ominus), die auf \mathcal{A} angewandt werden müssen, um das Skelett zu erreichen. — Im folgenden schreiben wir für die Abstandsfunktion kurz $\vartheta_{\mathcal{AB}}$.

Jetzt kann gezeigt werden, daß die morphologische Abstandsfunktion entlang \mathcal{S}^1 symmetrisch ist ($\vartheta_{\mathcal{AB}} = \vartheta_{\mathcal{BA}}$), entlang \mathcal{S}^2 jedoch antisymmetrisch \mathcal{S}^2 ($\vartheta_{\mathcal{AB}} = -\vartheta_{\mathcal{BA}}$). Damit stellt $\vartheta_{\mathcal{AB}}$ keine Metrik dar.

Im nächsten Schritt betrachten wir nur noch das Intervall von morphologischen Abständen zwischen zwei Regionen \mathcal{A} and \mathcal{B} , und vereinfachen weiter die Intervallgrenzen auf *Abstandsklassen* abhängig allein vom Vorzeichen:

Definition (Abstandsklassen): Wir vereinbaren folgende Klassen für morphologische Abstandswerte:

$$\Omega_\vartheta = \{\omega_1, \omega_0, \omega_2\} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \vartheta_{\mathcal{AB}} \in \omega_1 & \text{if } \vartheta_{\mathcal{AB}} < 0 \\ \vartheta_{\mathcal{AB}} \in \omega_0 & \text{if } \vartheta_{\mathcal{AB}} = 0 \\ \vartheta_{\mathcal{AB}} \in \omega_2 & \text{if } \vartheta_{\mathcal{AB}} > 0 \end{cases}$$

Ein Tripel, das aus der Relationengruppe C^i , der Klasse ω_{\min} der unteren Intervallgrenze $\vartheta_{\min} = \min(\vartheta_{\mathcal{AB}})$ und der Klasse ω_{\max} der oberen Intervallgrenze $\vartheta_{\max} = \max(\vartheta_{\mathcal{AB}})$ besteht, stellt nun eine Repräsentation der topologischen Relationen dar, die — bis auf die Gewichtung von OVERLAP — äquivalent zur 9-Intersektion bleibt, vgl. Tab. 2:

$$\{C^i, \omega_{\min}, \omega_{\max}\} \equiv \mathbf{I}_{\mathcal{AB}}^9 \tag{5}$$

Es läßt sich zeigen, das die Tripel in Tab. 2 vollständig sind.

Tabelle 2: Topologische Relationen, repräsentiert durch Relationengruppe und Abstandsklassen des kleinsten und größten Abstands entlang des Skeletts.

C	ϑ_{\min}	ϑ_{\max}	Relation
C^1	ω_2	ω_2	DISJUNCT
	ω_0	ω_2	TOUCH
	ω_1	ω_2	WEAK OVERLAP
C^2	ω_1	ω_2	STRONG OVERLAP
	ω_1	ω_0	COVERS
	ω_0	ω_2	COVERED BY
	ω_1	ω_1	CONTAINS
	ω_2	ω_2	CONTAINED BY
	ω_0	ω_0	EQUAL

4 Klassifizierung topologischer Relationen

4.1 Wahrnehmung, Abstraktion und Messung

Wissen über den Raum beruht auf *Beobachtung*, die wir einteilen in den Schritt der *Abstraktion* einer kontinuierlichen realen Welt auf Konzepte und in eine darauf aufsetzende physikalische *Messung* (Abb. 2).

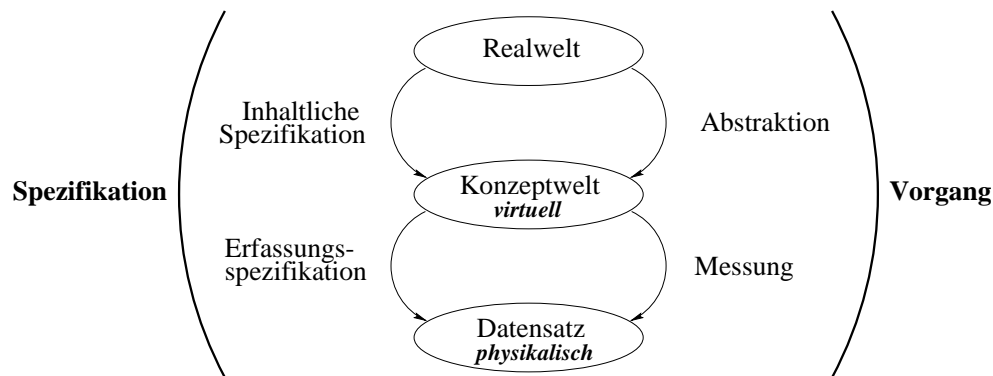


Abbildung 2: *Beobachtung als Abstraktion und Messung*. Entlehnt aus CEN 1994, David *et al.* 1996.

Eine geodätische Beobachtung, so schreibt bereits Baarda, ist in der Regel eine Einzelmessung und als solche nicht Teil eines Zufallsexperiments (Baarda 1967). Auf Daten aus einem räumlichen Informationssystem dürfen wir diesen Gedanken ohne weiteres übertragen: ein Datum ist diskret. Daß eine solche Beobachtung trotzdem statistisch beschreibbar ist — wie wir es tun wollen —, beruht auf der Vorstellung, daß sie wiederholt werden *könnte* und dann dem Zufall unterworfen wäre. Um diese Verbindung zu einer statistischen Beschreibung zu schaffen, werden Informationen über den Kontext der Beobachtung

benötigt. Dann kann aus dem Vergleich mit anderen Beobachtungen auf ein geeignetes Modell der Zufälligkeit zurückgeschlossen werden (a. a. O.).

Diesen Gedanken nehmen wir auf, indem wir den Beobachtungsprozeß in der Ableitung der topologischen Relation zweier Objekte mitmodellieren.

Definition (Unschärfe): Unter *Unschärfe* eines Konzepts verstehen wir die Differenz zwischen der realen Welt und ihrer Abstraktion, bzw. zwischen einer Welt höherer Detailliertheit und einer daraus generalisierten Abstraktion.

Definition (Ungenauigkeit): Unter *Ungenauigkeit* verstehen wir eine Charakterisierung der Abweichung einer kontinuierlichen Zufallsvariablen von ihrem Mittelwert, z. B. durch die Varianz.

Definition (Unsicherheit): Unter *Unsicherheit* (einer diskreten Zufallsvariablen) verstehen wir die Wahrscheinlichkeit diskreter Zufallsvariabler, einem bestimmten Wert zu entsprechen.

Uns interessiert weiter nur die *Unsicherheit* über die *räumliche Lagebeschreibung* der Objekte. Thematische Unsicherheit lassen wir bei unserer Betrachtung außen vor.

4.2 Abstraktionsunschärfe

Wir haben die Abstandsklassen mathematisch definiert. Dabei steht ω_0 für $\vartheta_{AB} = 0$. Nun ist einerseits die Wahrscheinlichkeit, daß eine kontinuierliche Zufallsvariable wie ϑ einen festen Wert annimmt, gleich 0. Andererseits besitzt auch das Abstraktionskonzept GLEICHNULL immer eine natürliche Breite. Der Betrag dieser Breite hängt weitgehend vom Kontext ab.

Beispiel: Ein Vermesser wird es bei einer Katasteraufnahme vermeiden, in unmittelbarer Nähe, sagen wir: im 5cm -Umkreis eines markierten Punkts einen zweiten Punkt anzulegen; er wird stattdessen den existierenden ein zweites Mal mitbenutzen. Das gibt wiederum Anlaß zu der Vermutung, daß zwei Punkte in digitalen Katasterwerken, die zueinander näher als diese 5cm liegen, denselben Punkt meinen.

Die Breite eines Konzepts kann durch Expertenbefragung ermittelt werden. Wir fragen eine große Zahl unabhängiger Experten nach ihrer Zustimmung, ob Werte auf der Zahlengeraden zum Konzept GLEICHNULL zu zählen sind. Dann stellt die Funktion, die die Anzahl von Zustimmungen zu jedem Wert beschreibt, eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar (Abb. 3).

Diese Funktion könnten wir zum Beispiel mit zwei Parametern beschreiben, einer mittleren Breite β und einer Weichheit des Konzepts, gegeben durch σ_β . Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Konzeptunschärfe wird dann durch die Faltung ('*') einer Gleichverteilung

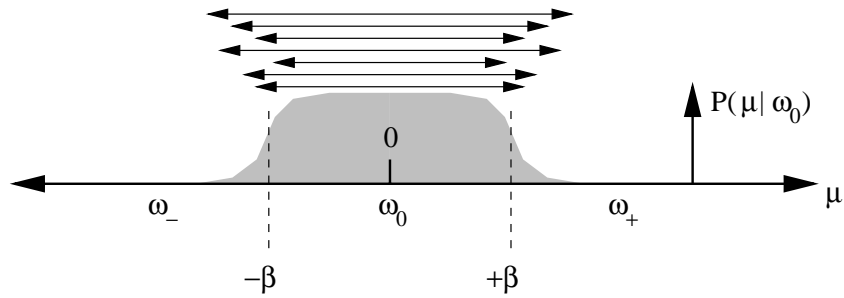


Abbildung 3: Eine Befragung vieler unabhängiger Experten zu ihrem Konzept GLEICHNULL liefert eine Wahrscheinlichkeitsdichte zur Konzeptunschärfe.

D_β mit einer Gaußverteilung¹ G_{σ_β} modelliert:

$$p(\underline{\mu} = \mu_\vartheta \mid \omega_0) = D_\beta * G_{\sigma_\beta} \quad (6)$$

Dieses Modell bleibt zu dem mathematischen Konzept “=0“ konsistent, da es im Fall von $\beta = 0$ und $\sigma_\beta = 0$ auf eine δ -Funktion als Wahrscheinlichkeitsdichte führt. — Wahrscheinlichkeitsdichten für ω_1 und ω_2 sind dann analog formulierbar. Beide Klassenintervalle sind praktisch geschlossen, sei es durch die endliche Größe der Regionen oder durch ein umfassendes Rechteck um \mathcal{A} und \mathcal{B} .

4.3 Meßungenaugigkeit

Wir modellieren hier allein zufällige Fehler, da grobe oder systematische Fehler prinzipiell vermeidbar sind.

Die gemessenen Größen sind die Ränder der beteiligten Regionen. In einem einfachen Ansatz setzen wir pauschale Werte für die Standardabweichungen jeder Region an: $\sigma_{\mathcal{A}}$ und $\sigma_{\mathcal{B}}$. Wenn wir jetzt die morphologische Abstandsfunktion funktional vereinfachen auf eine Differenz, folgt zunächst für σ_ϑ :

$$\sigma_\vartheta^2 = \sigma_{\mathcal{A}}^2 + \sigma_{\mathcal{B}}^2 \quad (7)$$

Damit kann der zufällige Fehler ε von $\vartheta_{\mathcal{AB}}$ durch folgende Dichte modelliert werden:

$$p_\varepsilon = G_{\sigma_\vartheta} \quad (8)$$

4.4 Beobachtungsunsicherheit

Nehmen wir an, daß Abstraktion und Messung unabhängig seien, dann können wir für den Meßfehler schreiben:

$$\underline{\varepsilon} \mid \underline{\mu}_\vartheta, \underline{\omega}_i = \underline{\varepsilon} \quad (9)$$

¹Eine Gaußverteilung ist definiert als $G_\sigma = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2} \exp(-\frac{1}{2}(x/\sigma)^2)$.

womit dann für die Beobachtung, bestehend aus Abstraktion und Messung, geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}\underline{\vartheta} \mid \underline{\omega}_i &= (\underline{\vartheta} - \underline{\mu}_\vartheta) \mid \underline{\omega}_i + \underline{\mu}_\vartheta \mid \underline{\omega}_i \\ &= \underline{\varepsilon} + \underline{\mu}_\vartheta \mid \underline{\omega}_i\end{aligned}\tag{10}$$

Um nun zu (bedingten) Wahrscheinlichkeiten zu gelangen, führen wir noch folgende Definition ein, die auf einem hinreichend kleinen Intervall $\Delta\vartheta$ beruht:

$$\begin{aligned}P(\underline{\vartheta} = \vartheta) &\stackrel{!}{=} P(\vartheta \leq \underline{\vartheta} < \vartheta + \Delta\vartheta) = F(\vartheta + \Delta\vartheta) - F(\vartheta) \\ &\stackrel{!}{=} p_\vartheta(\vartheta) \Delta\vartheta \quad \text{für kleine } \Delta\vartheta\end{aligned}$$

Die hier lästig erscheinende Abhängigkeit von einem Intervall $\Delta\vartheta$ wird später beseitigt. — Nach Gleichung 10 können wir, diese Konvention benutzend, nun die Wahrscheinlichkeit für die Evidenz ϑ zu einer Klasse angeben:

$$\begin{aligned}P(\underline{\vartheta} = \vartheta \mid \omega_i) &= p_{\vartheta \mid \omega}(\vartheta) \Delta\vartheta \\ &= (p_{\vartheta - \mu \mid \omega_i} * p_{\mu \mid \omega_i})(\underline{\vartheta}) \Delta\vartheta \\ &= (p_\varepsilon * p_{\mu \mid \omega_i})(\underline{\vartheta}) \Delta\vartheta\end{aligned}\tag{11}$$

Die benötigten Wahrscheinlichkeitsdichten haben wir aufgestellt (Gl. 6, 8). Diese einfachen Dichten kann man noch explizit falten, so daß die Wahrscheinlichkeit durch zwei *error functions*² erf_σ berechnet werden kann (Winter 1996):

$$P(\underline{\vartheta} \mid \omega_0) = (\text{erf}_\sigma(\vartheta - \beta_l) - \text{erf}_\sigma(\vartheta - \beta_r)) \Delta\vartheta\tag{12}$$

Analog folgt das für ω_1 und ω_2 .

4.5 Klassifizierung

Beobachtete Abstände sind unsicher. Daher benötigen wir eine Entscheidungsregel, um Abstände den Klassen von Ω_{RZ} zuzuweisen. Wir klassifizieren nach größter Wahrscheinlichkeit:

$$\underline{\vartheta} \mapsto \hat{\omega}_i \quad \text{falls } P(\underline{\omega}_i \mid \underline{\vartheta}) \geq P(\underline{\omega}_j \mid \underline{\vartheta}) \quad \text{für alle } j \neq i\tag{13}$$

Den Vektor $P(\underline{\omega}_i \mid \underline{\vartheta})$, $i \in \{1, 0, 2\}$, berechnen wir nach dem Theorem von Bayes (z. B. Koch 1987):

$$P(\underline{\omega}_i \mid \underline{\vartheta}) = \frac{P(\underline{\vartheta} \mid \underline{\omega}_i) P(\underline{\omega}_i)}{\sum_{\omega_j \in \Omega_\vartheta} P(\underline{\vartheta} \mid \underline{\omega}_j) P(\underline{\omega}_j)}\tag{14}$$

Setzen wir Gleichung 11 ein, dann kürzt sich nun der Faktor $\Delta\vartheta$ heraus. Außerdem kann die *a priori*-Wahrscheinlichkeit der Klassen ω_i angegeben werden. Mit endlichen Intervallen in Ω_ϑ kann sie proportional zur Länge der einzelnen Intervalle gesetzt werden. Dann hat ω_0 eine geringe, und ω_1 und ω_2 eine hohe *a priori*-Wahrscheinlichkeit.

²Die *error function* erf_σ ist definiert als erf_σ(x) = ∫_{-∞}^x G_σ(t) dt (Papoulis 1965).

Sind nun β , σ_β , ϑ und die Lageungenauigkeit von \mathcal{A} und \mathcal{B} gegeben, kann der Vektor von Wahrscheinlichkeiten für ϑ_{\min} und für ϑ_{\max} berechnet werden, und beide Abstände können klassifiziert werden.

Es verbleibt der Übergang von der Abstandsklassifizierung zur Relationsklassifizierung. Dazu erinnern wir uns, daß die Relation durch ein Tripel $\{C^i, \omega_{\min}, \omega_{\max}\}$ gegeben war, das aufgrund von Beobachtungen $\{C^i, \vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}\}$ bestimmt wird. Mit $P(C = C^i) = 1$, was aus der Diskussion in Abschnitt 3.1 folgt, finden wir:

$$P(C^i, \omega_{\min}, \omega_{\max} \mid C^i, \vartheta_{\min}, \vartheta_{\max}) = P(\omega_{\min} \mid \vartheta_{\min}) P(\omega_{\max} \mid \vartheta_{\max}) \quad (15)$$

Damit haben wir die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten topologischen Relation zwischen \mathcal{A} und \mathcal{B} angegeben (siehe Tab. 2). Auf dieselbe Weise können wir Wahrscheinlichkeiten von Alternativrelationen angeben, indem wir die entsprechenden Tripel aus den zwei Vektoren nach Gl. 14 bilden. Damit kann eine Entscheidung über die Relation auch beurteilt werden.

5 Diskussion

Wir stellen eine morphologische Abstandsfunktion vor, die wir heranziehen, um die topologische Relation zwischen zwei Regionen zu bestimmen. Wir zeigen die Äquivalenz einer Repräsentation durch extremale Abstände zur 9-Intersektion und heben die konzeptionelle Erweiterung durch nunmehr metrische Merkmale hervor. Als nächstes modellieren wir den Beobachtungsprozeß der Abstände statistisch. Wir überführen damit die Unsicherheit der Abstände auf die Unsicherheit der topologischen Relation. Mit einer statistischen Entscheidungsregel finden wir zu Wahrscheinlichkeiten für unsere Entscheidung sowie für Alternativrelationen, was eine Beurteilung ermöglicht.

An unserer Methode sind einige Aspekte neu:

- die Kombination eines statistischen Modells der Beobachtungsunsicherheit mit der qualitativen Unsicherheit topologischer Relationen;
- ein statistisches Modell für die Abstraktionsunschärfe;
- das Ersetzen leerer/nichtleerer Schnittmengen durch minimalen und maximalen morphologischen Abstand, womit metrische Informationen vorliegen und genutzt werden können;
- eine Neuinterpretation des *conceptual neighborhood*-Graphen, der hier auf Lageunsicherheit von Objekten angewandt wird;
- eine Teilung des *conceptual neighborhood*-Graphen durch die Aufteilung der Relation OVERLAP in zwei Ausprägungen.

Die vorgestellten Ideen sind für einfach zusammenhängende, regulär geschlossene Regionen ausgearbeitet worden, unter Restriktionen an die Größe der Lageunsicherheit. Daher stehen als weitere Aufgaben an, diese Ideen auf komplexere Objekte oder auf linien- und punkthafte Objekte zu übertragen. Es bleibt auch nachzuweisen, daß die Ideen für einfache Objekte im \mathbb{R}^1 oder für einfache Objekte im \mathbb{R}^3 gelten. Die dritte konkrete Weiterführung betrifft die Art der Relationen: es kann untersucht werden, ob die Methode auf andere qualitative Relationen übertragbar ist.

Ein anderer Aspekt ist die Erweiterung der Ursachen von Unsicherheit, oder auch die Kombination mit anderen Modellen von Unsicherheit, so zum Beispiel die Verknüpfung mit Regeln aus der Semantik oder der kartographischen Generalisierung.

Der Einfluß unsicherer topologischer Relationen auf alle Aspekte von Geo-Informationssystemen ist ebenfalls Aufgabe für die Zukunft.

Literatur

- Baarda, W. (1967): *Statistical Concepts in Geodesy*, Band 2 der Reihe New Series. Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1967.
- Caspary, Wilhelm; Scheuring, Robert (1992): Error-Bands as Measures of Geometrical Accuracy. In: *EGIS 92*, Seiten 226–233, Utrecht, 1992.
- CEN (1994): Data Description: Quality. Draft of Definitions Document N 15 rev. 4 (august), CEN TC 287 WG 2, 1994.
- Chrisman, Nicholas R. (1982): A theory of cartographic error and its measurement in digital databases. In: *Auto-Carto 5*, Seiten 159–168, Crystal City, 1982.
- Clementini, Eliseo; Di Felice, Paolino (1996): An Algebraic Model for Spatial Objects with Indeterminate Boundaries. In: Burrough, Peter A.; Frank, Andrew U. (Hrsg.), *Geographic Objects with Indeterminate Boundaries*, Band 2 der Reihe GISDATA, Kapitel 11, Seiten 155–169. Taylor & Francis, 1996.
- David, B.; Herrewegen, M. van den; Salgè, F. (1996): Conceptual Models for Geometry and Quality of Geographic Information. In: Burrough, Peter A.; Frank, Andrew U. (Hrsg.), *Geographic Objects with Indeterminate Boundaries*, Band 2 der Reihe GISDATA, Kapitel 13, Seiten 193–206. Taylor & Francis, 1996.
- Egenhofer, Max J.; Al-Taha, Khaled K. (1992): Reasoning about Gradual Changes of Topological Relationships. In: Frank, A. U.; Campari, I.; Formentini, U. (Hrsg.), *Theories and Models of Spatio-Temporal Reasoning in Geographic Space*, Seiten 196–219, New York, 1992. Springer LNCS 639.
- Egenhofer, Max J.; Franzosa, Robert D. (1991): Point-set topological spatial relations. *Int. Journal of Geographical Information Systems*, 5(2):161–174, 1991.
- Egenhofer, Max J.; Herring, John R. (1990): A Mathematical Framework for the Definition of Topological Relationships. In: *Proc. 4th Int. Symp. on Spatial Data Handling*, Seiten 803–813, Zürich, 1990. International Geographical Union.

- Egenhofer, Max J.; Herring, John R. (1991): Categorizing Binary Topological Relationships Between Regions, Lines, and Points in Geographic Databases. Technical Report, Department of Surveying Engineering, University of Maine, Orono, ME, 1991.
- Egenhofer, Max J.; Sharma, Jayant (1993): Topological Relations Between Regions in R^2 and Z^2 . In: Abel, D.; Ooi, B. (Hrsg.), *Advances in Spatial Databases*, Seiten 316–336, New York, 1993. 3rd Symposium on Large Spatial Databases SSD '93, Springer LNCS 692.
- Galton, Anthony (1994): Perturbation and Dominance in the Qualitative Representation of Continuous State-Spaces. Technical Report 270, Department of Computer Science, University of Exeter, Exeter, 1994.
- Koch, Karl Rudolf (1987): *Parameterschätzung und Hypothesentests*. Dümmler, Bonn, 2. Ausgabe, 1987.
- Kraus, Karl; Haussteiner, Karl (1993): Visualisierung der Genauigkeit geometrischer Daten. *GIS*, 6(3):7–12, 1993.
- Lantuejoul, Christian (1978): *La squelettisation et son application aux mesures topologiques des mosaïques polycristallines*. Dissertation, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1978.
- Molenaar, Martien (1994): A Syntax for the Representation of Fuzzy Spatial Objects. In: Molenaar, Martien; Hoop, Sylvia de (Hrsg.), *Advanced Geographic Data Modelling*, Seiten 155–169, Delft, 1994. Proc. AGDM '94, Netherlands Geodetic Commission.
- Papoulis, Athanasios (1965): *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1965.
- Perkal, J. (1956): On Epsilon Length. *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, 4:399–403, 1956.
- Serra, Jean (Hrsg.) (1982): *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Band 1. Academic Press, 1982.
- Wazinski, Peter (1993): Graduated Topological Relations. Technical Report 54, Universität des Saarlandes, 1993.
- Winter, Stephan (1994): Uncertainty of Topological Relations in GIS. In: Ebner, H.; Heipke, C.; Eder, K. (Hrsg.), *Proc. of ISPRS Comm. III Symposium Spatial Information from Digital Photogrammetry and Computer Vision*, Seiten 924–930, München, 1994.
- Winter, Stephan (1996): *Unsichere topologische Beziehungen zwischen ungenauen Flächen*. Dissertation, Landwirtschaftliche Fakultät der Universität Bonn, 1996.
- Worboys, Michael F.; Bofakos, Petros (1993): A Canonical Model for a Class of Areal Spatial Objects. In: Abel, David; Ooi, Beng Chin (Hrsg.), *Advances in Spatial Databases*, Seiten 36–52. Springer (LNCS 692), 1993.
- Zadeh, L. A. (1965): Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.