

# Krümmungsmaße

U.Weidner

e-mail: [weidner@ipb.uni-bonn.de](mailto:weidner@ipb.uni-bonn.de)

Stand:

Juni 1994

Ausdruck:

24. Februar 1995



Institut für Photogrammetrie  
Universität Bonn  
Nußallee 15  
D 53115 Bonn

**Zusammenfassung:** *Dieses Arbeitspapier stellt differentialgeometrische Grundlagen in Tensorschreibweise dar und zeigt Möglichkeiten zur Berechnung von Krümmungsmaßen für durch diskrete Punkte gegebene Flächen auf. Weiterhin werden Möglichkeiten zur Segmentierung von Flächen auf der Basis dieser Krümmungsmaße diskutiert.*

# Inhaltsverzeichnis

|          |                                                                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Differentialgeometrische Grundlagen</b>                                                            | <b>7</b>  |
| 1.1      | Begleitendes Dreibein der Fläche . . . . .                                                            | 7         |
| 1.2      | 1. Fundamentaltensor . . . . .                                                                        | 7         |
| 1.3      | Ableitungsgleichungen . . . . .                                                                       | 10        |
| 1.4      | 2. Fundamentaltensor . . . . .                                                                        | 11        |
| 1.5      | Normalkrümmung und Hauptkrümmungen . . . . .                                                          | 12        |
| 1.6      | Gauß'sche und mittlere Krümmung . . . . .                                                             | 14        |
| 1.7      | Weingarten Abbildung . . . . .                                                                        | 15        |
| 1.7.1    | Definition . . . . .                                                                                  | 15        |
| 1.7.2    | Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .                                                                | 16        |
| 1.7.3    | Hauptkrümmungsrichtungen . . . . .                                                                    | 17        |
| 1.7.4    | Quadrierte Weingarten Abbildung . . . . .                                                             | 18        |
| 1.8      | Krümmungsmaße von Graphenflächen . . . . .                                                            | 20        |
| 1.9      | Alternative Krümmungsmaße . . . . .                                                                   | 23        |
| 1.10     | Analogien zwischen Kurven im $\mathbb{R}^2$ und Flächen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .                   | 26        |
| <b>2</b> | <b>Bestimmung von Krümmungsmaßen aus beliebig verteilten diskreten Flächenpunkten</b>                 | <b>27</b> |
| 2.1      | Flächennormalenvektoren . . . . .                                                                     | 27        |
| 2.1.1    | Mittelung von Flächennormalenvektoren . . . . .                                                       | 28        |
| 2.2      | Normalkrümmung . . . . .                                                                              | 29        |
| 2.3      | Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen . . . . .                                                | 30        |
| 2.4      | Gauß'sche Krümmung . . . . .                                                                          | 31        |
| 2.5      | Mittlere Krümmung . . . . .                                                                           | 32        |
| 2.6      | Nachbarschaft . . . . .                                                                               | 32        |
| <b>3</b> | <b>Bestimmung von Krümmungsmaßen aus diskreten Flächenpunkten eines Rasters <math>u^\alpha</math></b> | <b>35</b> |
| 3.1      | Flächennormalenvektoren . . . . .                                                                     | 35        |
| 3.2      | Normalkrümmung . . . . .                                                                              | 36        |
| 3.3      | Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen . . . . .                                                | 36        |

|          |                                                                               |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Bestimmung von Krümmungsmaßen auf der Basis von Flächenapproximationen</b> | <b>37</b> |
| 4.1      | Lokale Approximation von 2.5D-Flächen . . . . .                               | 37        |
| 4.1.1    | 2.5D-Flächen beliebig verteilter diskreter Flächenpunkte . . . . .            | 38        |
| 4.1.2    | 2.5D-Flächen diskreter Flächenpunkte eines Rasters $u^\alpha$ . . . . .       | 39        |
| 4.2      | Lokale Approximation von 3D-Flächen . . . . .                                 | 39        |
| 4.2.1    | 3D-Flächen beliebig verteilter diskreter Flächenpunkte . . . . .              | 39        |
| 4.2.2    | 3D-Flächen diskreter Flächenpunkte eines Rasters $u^\alpha$ . . . . .         | 39        |
| 4.2.3    | Lokale 2.5D-Repräsentation . . . . .                                          | 40        |
| 4.3      | Art und Grad der Polynome . . . . .                                           | 40        |
| 4.3.1    | Orthogonale Polynome . . . . .                                                | 40        |
| 4.3.2    | Polynomgrad . . . . .                                                         | 41        |
| 4.4      | Bestimmung der Ableitungen . . . . .                                          | 42        |
| <b>5</b> | <b>Numerische Aspekte</b>                                                     | <b>43</b> |
| <b>6</b> | <b>Segmentierung von Flächen</b>                                              | <b>46</b> |
| 6.1      | Krümmungsmaße zur Segmentierung durch Klassifikation . . . . .                | 46        |
| 6.2      | Homogenitätskriterien zur Segmentierung . . . . .                             | 50        |
| <b>A</b> | <b>Tensorrechnung</b>                                                         | <b>51</b> |
| <b>B</b> | <b>Notation</b>                                                               | <b>53</b> |
|          | <b>Literatur</b>                                                              | <b>54</b> |

## Abbildungsverzeichnis

|     |                                                                          |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------|----|
| 1-1 | Normalkrümmung . . . . .                                                 | 13 |
| 1-2 | Hauptkrümmungen . . . . .                                                | 13 |
| 1-3 | Analogien Kurve $\in \mathbb{R}^2$ - Fläche $\in \mathbb{R}^3$ . . . . . | 26 |
| 2-1 | Bestimmung der Normalkrümmung . . . . .                                  | 30 |
| 2-2 | Exzeß und Gauß'sche Krümmung . . . . .                                   | 31 |

|     |                                                                      |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------|----|
| 2-3 | Nachbarschaftsproblematik . . . . .                                  | 33 |
| 3-1 | Beispiele zur topologischen Abbildung auf ein Raster . . . . .       | 36 |
| 5-1 | Prinzipielle Lösungsansätze . . . . .                                | 44 |
| 6-1 | Unstetigkeiten und ihre Bedeutung . . . . .                          | 48 |
| 6-2 | Klassifikation nach Hauptkrümmungen . . . . .                        | 48 |
| 6-3 | Klassifikation nach Gauß'scher und mittlerer Krümmung (I) . . . . .  | 48 |
| 6-4 | Klassifikation nach Gauß'scher und mittlerer Krümmung (II) . . . . . | 49 |

---

# Vorbemerkungen

## Allgemeines

Dieses Arbeitspapier beinhaltet eine Zusammenstellung von differentialgeometrischen Grundlagen und von Möglichkeiten zur Berechnung von Krümmungsmaßen für durch diskrete Punkte gegebene Flächen. Es sollte ursprünglich nur als persönliches Hilfsmittel und zur Vorbereitung einer Arbeit über ein Verfahren zur informationserhaltenden Filterung von Flächen dienen. Aus diesem Grund erhebt diese Zusammenstellung der differentialgeometrischen Grundlagen nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. Insbesondere werden differentialgeometrische Eigenschaften von Kurven einer Fläche nur dort diskutiert, wo sie für das Verständnis von Eigenschaften der Fläche benötigt werden. Für einen umfassenden Überblick über die Differentialgeometrie sei auf allgemeine Lehrbücher, wie doCarmo 1976, Lipschütz 1980 und insbesondere Heitz 1988 verwiesen, welches im wesentlichen auch die Grundlage für den Abschnitt 1 dieses Arbeitspapiers war. Mit der Thematik von durch diskrete Punkte gegebenen Flächen beschäftigen sich Abschnitt 2 und Abschnitt 3. Hierfür wurde insbesondere Besl 1990 zugrundegelegt. Abschnitt 4 diskutiert die Bestimmung von Krümmungsmaßen auf der Basis von Approximationen diskreter Flächen. Im Abschnitt 5 werden einige numerische Aspekte behandelt, bevor in Abschnitt 6 Möglichkeiten zur Segmentierung von Flächen basierend auf Krümmungsmaßen dargestellt werden.

Die im Text angegebenen Anmerkungen und Beispiele dienen zur weiteren Erläuterung, sind jedoch zum Verständnis beim ersten Lesen nicht erforderlich.

## Notation

Die Darstellung der Notation der differentialgeometrischen Grundlagen erfolgt in Tensor Schreibweise (vgl. Klingbeil 1966, Heitz 1988). Grundlegende Größen werden in dieser und in der klassischen Notation gegenübergestellt. Im folgenden sollen nur einige allgemeine Hinweise gegeben werden:

- Für die Indizes gilt  $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \{1, 2\}$  und  $i, j, k, \dots \in \{1, 2, 3\}$ .
- Zur besseren Unterscheidung gilt ferner:

$$\begin{aligned} u^\alpha & : \text{Flächenkoordinaten} \\ x_i & : \text{3D kartesische Koordinaten mit } x^i \equiv x_i = x_i. \end{aligned}$$

- Es gilt die *Einstein'sche Summenkonvention*: Tritt in einem Produkt ein und derselbe Index zweimal auf, einmal oben und einmal unten, so wird über diesen von 1 bis  $n$  summiert, wobei  $n$  die Dimension des Raumes bezeichnet.

Am Schluß dieses Arbeitspapiers ist die Notation für hier verwendete Größen angegeben.

---

## **Ergänzende Vorbemerkung zur Überarbeitung (Stand Juni 1994)**

Der inhaltliche Teil ist unverändert zum Stand Dezember 1993, jedoch sind einige neue Literaturstellen in Anmerkungen und Fußnoten eingearbeitet worden.

# 1 Differentialgeometrische Grundlagen

Innerhalb dieses Abschnittes werden die differentialgeometrischen Grundlagen, wie sie für die folgenden Abschnitte benötigt werden, dargestellt. Diese Darstellung bezieht sich auf reguläre 3D-Flächen, d. h. 2D-Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^3$ . Im Abschnitt 1.8 wird dann eine Spezialisierung für Graphenflächen (*graph surface*, *Monge patch*) bzw. 2.5D-Flächen<sup>1</sup> durchgeführt. Diese Spezialisierung ist im Hinblick auf Anwendungen im Bereich der digitalen Bildverarbeitung und DHM-Anwendungen von Interesse. Im Abschnitt 1.9 werden dann alternative Krümmungsmaße vorgestellt, bevor im Abschnitt 1.10 zur Vervollständigung der Darstellung die Analogien zwischen einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  und einer Fläche im  $\mathbb{R}^3$  zusammengefaßt werden.

## 1.1 Begleitendes Dreibein der Fläche

Eine Fläche  $\mathcal{F}$  im  $\mathbb{R}^3$  kann durch die kartesischen Koordinaten  $x_i$  als Funktion von unabhängigen Flächenkoordinaten  $u^\alpha$

$$x_i = x_i(u^\alpha) \quad (1.1)$$

dargestellt werden. Die Koordinatenlinien sind durch

$$\begin{aligned} u^1\text{-Linie} &: u^1 \text{ variabel, } u^2 = \text{const.} \\ u^2\text{-Linie} &: u^2 \text{ variabel, } u^1 = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.2)$$

gegeben. Die zugehörigen Tangentenvektoren sind

$$x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha} \quad (1.3)$$

Der Betrag der Tangentenvektoren ist i. a. ungleich 1. Sie sind per Definition linear unabhängig, so daß der Flächennormalenvektor<sup>2</sup> aus

$$n_i = \frac{\varepsilon_{ijk} x_{j,1} x_{k,2}}{\| \varepsilon_{lmn} x_{m,1} x_{n,2} \|} \quad (1.4)$$

folgt. Diese drei Vektoren bilden das *begleitende Dreibein* der Fläche (vgl. Abb. 1-2).

**Anmerkung 1.1** Gilt  $\| \varepsilon_{lmn} x_{m,1} x_{n,2} \| \neq 0$  für eine Fläche  $\mathcal{F}$  oder einen Flächenbereich, so spricht man von einer regulären Fläche. Eine Singularität liegt vor, falls der Betrag gleich Null ist. •

## 1.2 1. Fundamentaltensor

Die Bestimmung von Größen der *inneren Flächengeometrie*, z. B. der Entfernung von zwei Flächenpunkten entlang einer Flächenkurve oder des Flächeninhaltes eines Flächenstückes,

---

<sup>1</sup>Dieser Begriff findet sich bereits bei Besl und Jain 1986 und wird hier synonym mit dem Begriff Graphenfläche benutzt.

<sup>2</sup>zur Schreibweise vgl. Anhang A.

basiert auf dem 1. Fundamentaltensor. Betrachtet man das Bogenelement einer Flächenkurve  $u^\alpha(t)$ , so erhält man mit

$$\frac{dx_{i,}(u^\alpha(t))}{dt} = x_{i,\alpha} \frac{du^\alpha}{dt}$$

und

$$ds^2 = dx_i dx_i.$$

die 1. Fundamentalform<sup>3</sup>

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (1.5)$$

wobei  $g_{\alpha\beta}$  der 1. kovariante Fundamentaltensor oder Metriktensor

$$g_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta} \quad (1.6)$$

ist. Er ist eine Verallgemeinerung des Betragsquadrates des Tangentenvektors einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  (vgl. Abschnitt 1.10). Seine Komponenten sind abhängig von der Parametrisierung der Fläche. Für die Determinante des Metriktensors gilt:

$$\begin{aligned} g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 &= \|x_{i,1}\|^2 \|x_{i,2}\|^2 - \cos^2 \theta \|x_{i,1}\|^2 \|x_{i,2}\|^2 \\ &= \|x_{i,1}\|^2 \|x_{i,2}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) > 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\theta$  bezeichnet hierbei den Winkel zwischen den Koordinatenlinien bzw. den Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien und ist per Definition für eine reguläre Fläche ungleich Null. In klassischer Notation ist

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Der 1. kontravariante Fundamentaltensor ist invers zu  $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (1.8)$$

und daher folgt

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g} \quad g^{12} = \frac{-g_{12}}{g} \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g} \quad (1.9)$$

Im Fall orthogonaler Koordinatenlinien ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) gilt:

$$g_{12} = g^{12} = x_{i,1} x_{i,2} = 0 \quad (1.10)$$

Gilt ferner  $g_{11} = g_{22}$  so liegen *isotherme Flächenkoordinaten* vor, für die sich die 1. Fundamentalform zu

$$ds^2 = g_{\gamma\gamma} du^\gamma du^\gamma = g_{11}((du^1)^2 + (du^2)^2) = g_{22}((du^1)^2 + (du^2)^2) \quad (1.11)$$

vereinfacht.

---

<sup>3</sup>Die erste Fundamentalform wird in der Literatur auch mit  $I$  bezeichnet.



**Beispiel 1.1** Als Beispiel für die Anwendung des Metriktensors zur Berechnung von Größen der inneren Flächengeometrie soll der Flächeninhalt eines Flächenstückes  $dF$  bestimmt werden. Der Flächeninhalt folgt aus dem Spatprodukt<sup>4</sup> des begleitenden Dreibeins:

$$dF = \varepsilon_{ijk} \cdot n_i \cdot x_{j,1} \cdot x_{k,2} \quad (1.12)$$

Ersetzt man den Flächennormalenvektor durch

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon_{ijk} \cdot x_{j,1} \cdot x_{k,2} \quad (1.13)$$

so folgt

$$dF = \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 \quad (1.14)$$

□

**Anmerkung 1.2** Die erste Fundamentalform ist die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras. Für kartesische Koordinaten gilt

$$ds^2 = \Delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j \quad (1.15)$$

mit dem kartesischen Maßtensor  $\Delta_{ij} = \delta_{ij}$ . Mit

$$x^i \equiv x_i = x_i \quad (1.16)$$

folgt weiterhin

$$ds^2 = \delta_{ij} \Delta x^i \Delta x^j = \Delta x_i \Delta x^i = \Delta x_i \cdot \Delta x_i = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (1.17)$$

•

**Anmerkung 1.3 (1. Fundamentaltensor und Summe der Residuenquadrate)**

Das Gauß-Markoff-Modell lautet:

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + \mathbf{e} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (1.18)$$

Im einzelnen gilt:

- $\mathbf{y}$  : Vektor der Beobachtungen
- $\mathbf{e}$  : Vektor der Residuen
- $\mathbf{X}$  : Koeffizientenmatrix
- $\boldsymbol{\beta}$  : Vektor der gesuchten festen Parameter
- $\mathbf{P}$  : Gewichtsmatrix der Beobachtungen

Die Schätzwerte für die Parameter (hier dargestellt für das Gauß-Markoff-Modell mit vollem Rang)

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{y}$$

---

<sup>4</sup>vgl. Anhang A.

ergeben sich durch Minimierung der Summe der Residuenquadrate

$$\Omega = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} \quad (1.19)$$

und in Tensorschreibweise (vgl. Wolf 1968)

$$\Omega = p_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta \quad (1.20)$$

Formal ergibt sich eine Analogie zur 1. Fundamentalform

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (1.21)$$

so daß der Metriktensor aus statistischer Sicht als Gewichtsmatrix interpretiert werden kann. Betrachtet man den Sonderfall  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$  folgt

$$\mathbf{R} \mathbf{y} = \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (1.22)$$

mit dem orthogonalen Projektionsoperator

$$\mathbf{R} = \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \quad (1.23)$$

(vgl. Koch 1987, S. 185 und Abb.323-1).  $\mathbf{R}$  ist symmetrisch und idempotent. Die Abbildung gibt eine Interpretation für diesen Sonderfall in kartesischen Koordinaten, wobei

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} = \delta_{ij} \quad \text{mit } i, j \in 1, 2, \dots, n \quad (1.24)$$

die Gewichtsmetrik (kartesischer Maßtensor im  $\mathbb{R}^n$ ) repräsentiert. •

### 1.3 Ableitungsgleichungen

Die Ableitungsgleichungen von *Gauß* und *Weingarten* stellen die Ableitungen der Tangentenvektoren und der Flächennormalen nach den Flächenkoordinaten als Linearkombination von eben diesen Vektoren dar. Sie bilden ein für die Fläche bestimmendes System von Differentialgleichungen und einen Teil des Hauptsatzes der Flächentheorie (vgl. Heitz 1988, S.25). Sie lauten

#### Ableitungsgleichungen nach Gauß

$$x_{i,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma x_{i,\gamma} + L_{\alpha\beta} n_i \quad (1.25)$$

#### Ableitungsgleichungen nach Weingarten

$$n_{i,\beta} = -L_\beta^\gamma x_{i,\gamma} \quad (1.26)$$

mit dem 2. Fundamentaltensor  $L_{\alpha\beta}$  und dem Christoffelsymbol 2. Art

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = g^{\gamma\delta} \Gamma_{\alpha\beta|\delta} = g^{\gamma\delta} x_{i,\alpha\beta} x_{i,\delta} \quad (1.27)$$

$\Gamma_{\alpha\beta|\gamma}$  ist das Christoffelsymbol 1. Art.

$$\Gamma_{\alpha\beta|\gamma} = x_{i,\alpha\beta} x_{i,\gamma} = \frac{g_{\alpha\gamma,\beta} + g_{\beta\gamma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}}{2} \quad (1.28)$$

## 1.4 2. Fundamentaltensor

Der im Abschnitt 1.2 eingeführte 1. Fundamentaltensor beinhaltet die Information über die innere Flächengeometrie. Neben diesem 1. Fundamentaltensor ist der 2. Fundamentaltensor definiert, der die Information über die Einbettung der Fläche im  $\mathbb{R}^3$  ausdrückt.

Bestimmt man das Skalarprodukt von (1.25) und dem Flächennormalenvektor, so erhält man, da

$$n_i \cdot x_{i,\alpha} = 0 \quad (1.29)$$

den 2. Fundamentaltensor

$$L_{\alpha\beta} = n_i \cdot x_{i,\alpha\beta} \quad (1.30)$$

mit

$$x_{i,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

Bildet man die Ableitungen von (1.29) nach den Flächenkoordinaten  $u^\beta$ , so erhält man

$$n_{i,\beta} \cdot x_{i,\alpha} + n_i \cdot x_{i,\alpha\beta} = 0 \quad (1.31)$$

und somit

$$L_{\alpha\beta} = n_i \cdot x_{i,\alpha\beta} = -n_{i,\alpha} \cdot x_{i,\beta} \quad (1.32)$$

Seine Komponenten sind abhängig von der Parametrisierung der Fläche.

Der gemischte 2. Fundamentaltensor aus den Ableitungsgleichungen von Weingarten folgt aus

$$L_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} L_{\gamma\beta} \quad (1.33)$$

Weiterhin gilt

$$l = L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \quad (1.34)$$

In klassischer Notation ist der 2. Fundamentaltensor

$$(L_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Gilt  $g_{12} = L_{12} = 0$ , so sind die Koordinatenlinien *Krümmungslinien*, d.h. Flächenkurven deren Tangentenrichtungen mit den Hauptkrümmungsrichtungen in allen Punkten der Flächenkurve identisch sind.

Auf der Grundlage des zweiten Fundamentaltensors wird die zweite Fundamentalform analog zur ersten durch

$$II = L_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = -dn_i \cdot dx_i \quad (1.36)$$

definiert.

## 1.5 Normalkrümmung und Hauptkrümmungen

Nachdem die grundlegenden Größen der Flächentheorie vorgestellt wurden, sollen nun Krümmungsmaße von Flächen und Flächenkurven diskutiert werden. Die Krümmung  $k$  einer Flächenkurve  $x_i(s)$  ist der Betrag von

$$x''_{i,i} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} = k_g m_i + k_n n_i \quad (1.37)$$

mit

$$m_i = \varepsilon_{ijk} n_j x'_k \quad \text{und} \quad u^{\alpha'} = \frac{du^\alpha}{ds}$$

wobei  $k_n$  die Normalkrümmung und  $k_g$  die geodätische Krümmung der Flächenkurve bezeichnen. Die Normalkrümmung der Flächenkurve erhält man durch das Skalarprodukt von (1.37) und dem Flächennormalenvektor:

$$k_n = n_i x''_{i,i} = L_{\alpha\beta} u^{\alpha'} u^{\beta'} \quad (1.38)$$

Analog erhält man die geodätische Krümmung durch das Skalarprodukt mit  $m_i$ :

$$k_g = m_i x''_{i,i} = \varepsilon_{ijk} n_j x'_k x''_{i,i} = \varepsilon_{ijk} x'_i x''_j n_k \quad (1.39)$$

Da  $m_i$  und  $n_i$  orthogonal (vgl. Abb. 1-1), beschreibt (1.37) ein rechtwinkliges Dreieck, so daß

$$k^2 = k_g^2 + k_n^2 \quad (1.40)$$

folgt. Diese Gleichung kann auch aus den Beziehungen

$$k_g = k \sin \varphi \quad (1.41)$$

und

$$k_n = k \cos \varphi \quad (1.42)$$

abgeleitet werden. (1.42) ist der *Satz von Meusnier*.

**Anmerkung 1.4** *Gilt  $k_g = 0$  entlang einer Flächenkurve, so ist sie eine geodätische Linie. Die Differentialgleichung einer solchen Linie ist gegeben durch*

$$k_\gamma = u^{\gamma''} + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u^{\alpha'} u^{\beta'} \quad \gamma \in \{1, 2\} \quad (1.43)$$

•

Da sich die Normalkrümmung auf eine vorgegebene Flächenkurve bezieht, ist sie i. a. richtungsabhängig. Hauptkrümmungen sind Extrema der Normalkrümmung. Sie ergeben sich aus der Gleichung<sup>5</sup>

$$k_n^2 - g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} k_n + \frac{l}{g} = 0 \quad (1.44)$$

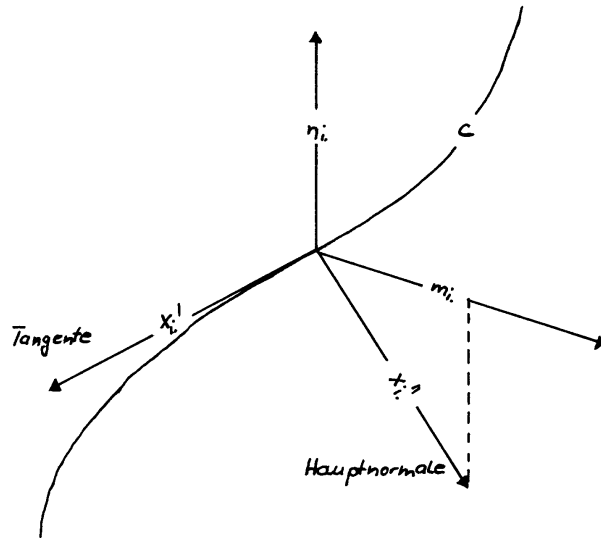


Abb. 1-1: Normalkrümmung

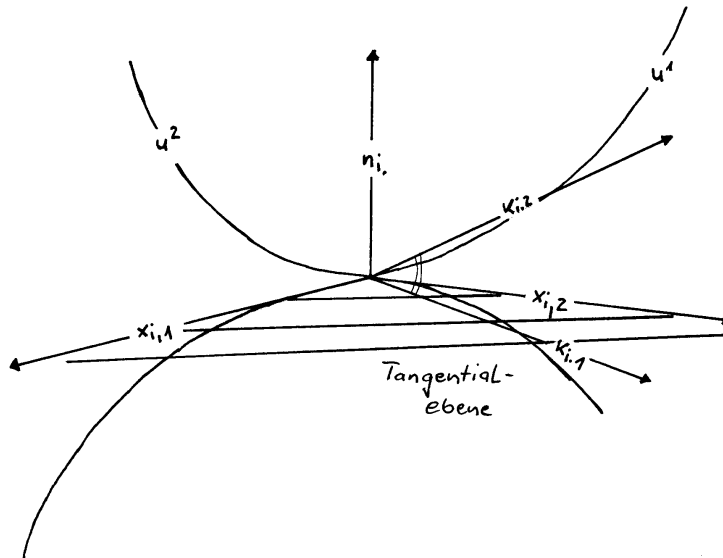


Abb. 1-2: Hauptkrümmungen

$$k_{n1,2} = \frac{g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{g^{\epsilon\eta} L_{\epsilon\eta}}{2}\right]^2 - \frac{l}{g}} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \quad (1.45)$$

Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen sind orthogonal.

Gilt  $k_n = const.$  bzw. somit  $k_{n1} = k_{n2}$  liegt ein Nabelpunkt (*umbilical point*) vor. Für Nabelpunkte existiert keine ausgezeichnete Hauptkrümmungsrichtung. Alle Punkte einer

<sup>5</sup>Diese Gleichung ist herleitbar aus der Eigenwertbestimmung der Weingarten Abbildung  $W_\beta^\alpha$  (vgl. (1.55)).

Ebene und einer Kugel sind Nabelpunkte.

**Anmerkung 1.5** Sind die Koordinatenlinien Krümmungslinien und führt man den Richtungswinkel  $\theta$  als Winkel zwischen  $u^2$ -Linie und einer Flächenkurve ein, so gilt der Satz von Euler

$$k_n = k_{n1} \sin^2 \theta + k_{n2} \cos^2 \theta \quad (1.46)$$

für die Normalkrümmung in Richtung der Flächenkurve. •

## 1.6 Gauß'sche und mittlere Krümmung

Die Gauß'sche und mittlere Krümmung sind Funktionen der Hauptkrümmungen. Die Gauß'sche Krümmung ist gegeben durch (vgl. (1.53))

$$K = k_{n1} k_{n2} = \frac{l}{g} \quad (1.47)$$

und die mittlere Krümmung durch (vgl. (1.54))

$$H = \frac{k_{n1} + k_{n2}}{2} = \frac{g^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}}{2} \quad (1.48)$$

Die Gauß'sche Krümmung  $K$  ist unabhängig von der Parametrisierung der Fläche. Beide Krümmungsmaße sind weiterhin invariant gegenüber Rotation und Translation der Fläche. Für die Form konvexer Flächen ist allein die Gauß'sche Krümmung  $K$  bestimmend, für die Form von Graphenflächen (*graph surfaces*) ist unter bestimmten Nebenbedingungen die mittlere Krümmung  $H$  allein bestimmend. Flächen mit  $K = 0$  sind Torsen, Flächen mit  $H = 0$  Minimalflächen<sup>6</sup>.

**Anmerkung 1.6** Neben der ersten und zweiten Fundamentalform ist in einigen Lehrbüchern die dritte Fundamentalform definiert:

$$III = 2 H II - K I \quad (1.49)$$

Diese Form besitzt gegenüber der zweiten Fundamentalform den Vorteil, daß ihr Vorzeichen nicht wie das Vorzeichen von  $II$  von der Parametrisierung der Fläche abhängig ist. Ein durch eine geänderte Parametrisierung hervorgerufener Vorzeichenwechsel von  $II$  wird durch den ebenfalls resultierenden Vorzeichenwechsel von  $H$  aufgehoben. •

**Anmerkung 1.7** Ein geodätisches Dreieck auf einer Fläche wird begrenzt durch drei geodätische Linien. Für den Exzeß des geodätischen Dreiecks gilt:

$$\epsilon = \int_{\Delta F} K dF = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \quad (1.50)$$

wobei  $\alpha_i$  die Winkel zwischen den geodätischen Linien in den Punkten  $P_i$  bezeichnen. Ist die Gauß'sche Krümmung  $K = K_0$  in  $\Delta F$  konstant, so gilt

$$\epsilon = K_0 \Delta F \quad (1.51)$$

Ist der Flächeninhalt  $\Delta F$  und der Exzeß  $\epsilon$  bekannt, so kann die Gauß'sche Krümmung bestimmt werden ohne vorher die Hauptkrümmungen zu bestimmen. •

---

<sup>6</sup>Minimalflächen sind die Lösung eines Variationsproblems, bei dem eine Fläche minimalen Flächeninhaltes bei der Vorgabe einer sie berandenden Kurve  $\mathcal{C}$  zu bestimmen ist.

## 1.7 Weingarten Abbildung

### 1.7.1 Definition

So wie der Metriktenor eine Verallgemeinerung des Betragsquadrates des Tangentenvektors einer Kurve im  $\mathbb{R}^2$  darstellt, ist die Weingarten Abbildung (*Weingarten mapping, shape operator*) eine Verallgemeinerung der Krümmung einer solchen Kurve (vgl. Abschnitt 1.10). Sie ist eine Funktion des ersten und zweiten Fundamentaltensors und gibt die lokalen Krümmungsverhältnisse an. In der digitalen Bildverarbeitung wird zur Charakterisierung der lokalen Krümmungsverhältnisse oftmals die Hesse-Matrix der Intensitätsfunktion genutzt. Sie ist eine Spezialisierung der Weingarten-Abbildung, worauf im Abschnitt 1.8 näher eingegangen wird.

Die Weingarten Abbildung ist gegeben durch

$$W_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\gamma} L_{\gamma\beta} \quad (W_{\beta}^{\alpha}) = \begin{pmatrix} W_1^1 & W_2^1 \\ W_1^2 & W_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

Sie ist nicht symmetrisch. Die einzelnen Elemente aus (1.52) lauten

$$W_1^1 = g^{11} L_{11} + g^{12} L_{21} = \frac{g_{22} L_{11} - g_{12} L_{21}}{g} = \frac{G L - F M}{g}$$

$$W_2^1 = g^{11} L_{12} + g^{12} L_{22} = \frac{g_{22} L_{12} - g_{12} L_{22}}{g} = \frac{G M - F N}{g}$$

$$W_1^2 = g^{21} L_{11} + g^{22} L_{21} = \frac{-g_{12} L_{11} + g_{11} L_{21}}{g} = \frac{E M - F L}{g}$$

$$W_2^2 = g^{21} L_{12} + g^{22} L_{22} = \frac{-g_{12} L_{12} + g_{11} L_{22}}{g} = \frac{E N - F M}{g}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \det(W_{\beta}^{\alpha}) &= W_1^1 W_2^2 - W_2^1 W_1^2 \\ &= (g^{11} L_{11} + g^{12} L_{21})(g^{21} L_{12} + g^{22} L_{22}) - (g^{11} L_{12} + g^{12} L_{22})(g^{21} L_{11} + g^{22} L_{21}) \\ &= \frac{(g_{11} g_{22} - g_{12}^2) L_{11} L_{22} - (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) L_{22}^2}{g^2} = \frac{l}{g} = K \end{aligned} \quad (1.53)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(W_{\beta}^{\alpha}) &= W_1^1 + W_2^2 = g^{11} L_{11} + g^{12} L_{21} + g^{21} L_{12} + g^{22} L_{22} \\ &= \frac{g_{22} L_{11} - g_{12} L_{12} - g_{12} L_{12} + g_{11} L_{22}}{g} = \frac{g_{22} L_{11} + g_{11} L_{22} - 2 g_{12} L_{12}}{g} \\ &= \frac{G L + E N - 2 F M}{g} = 2 H \end{aligned} \quad (1.54)$$

Handelt es sich um isotherme Flächenkoordinaten, d. h.  $g_{12} = 0$  und  $g_{11} = g_{22} = \sqrt{g}$ , so ist die Weingarten Abbildung symmetrisch. Sind die Koordinatenlinien Krümmungslinien und daher  $g_{12} = L_{12} = 0$ , so ist die Weingarten Abbildung diagonal und die Elemente  $W_1^1$  und  $W_2^2$  entsprechen den Hauptkrümmungen.

## 1.7.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte der Weingarten Abbildung folgen aus der *charakteristischen Gleichung*

$$\det (W_{\beta}^{\alpha} - \lambda_{(\gamma)} \delta_{\beta}^{\alpha}) = \det \begin{pmatrix} W_1^1 - \lambda_{(\gamma)} & W_2^1 \\ W_1^2 & W_2^2 - \lambda_{(\gamma)} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.55)$$

$$(W_1^1 - \lambda_{(\gamma)})(W_2^2 - \lambda_{(\gamma)}) - W_1^2 W_2^1 = 0$$

$$\lambda_{(\gamma)}^2 - \lambda_{(\gamma)} (W_1^1 + W_2^2) + (W_1^1 W_2^2 - W_1^2 W_2^1) = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{W_1^1 + W_2^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(W_1^1 + W_2^2)^2}{4} - (W_1^1 W_2^2 - W_1^2 W_2^1)} \\ &= \frac{\text{tr}(W_{\beta}^{\alpha})}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr}(W_{\delta}^{\gamma}))^2}{4} - \det(W_{\nu}^{\mu})} = H \pm \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

und entsprechen den Hauptkrümmungen (vgl. (1.45)). Die Eigenwerte sind eindeutig, nicht jedoch die zugehörigen Eigenvektoren<sup>7</sup> (vgl. Campbell 1980). Weiterhin sind die Eigenwerte reell, da die Diskriminante

$$\begin{aligned} H^2 - K &= \left(\frac{1}{2}(k_{n1} + k_{n2})\right)^2 - k_{n1} k_{n2} = \frac{1}{4} k_{n1}^2 + \frac{1}{2} k_{n1} k_{n2} + \frac{1}{4} k_{n2}^2 - k_{n1} k_{n2} \\ &= \frac{1}{4} k_{n1}^2 - \frac{1}{2} k_{n1} k_{n2} + \frac{1}{4} k_{n2}^2 = \left(\frac{1}{2}(k_{n1} - k_{n2})\right)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ist  $H = 0$  so ist  $K \geq 0$  (vgl. Abb. 6-3). Ist  $H^2 = K$  liegt ein Nabelpunkt vor. Für  $H^2 \neq K$  ist  $k_{n1} \neq k_{n2}$  und die zugehörigen linearunabhängigen Eigenvektoren  $t_{(\beta)}^{\alpha}$  folgen aus der Gleichung

$$W_{\beta}^{\alpha} t_{(\gamma)}^{\beta} = \lambda_{(\gamma)} t_{(\gamma)}^{\alpha} = k_{n(\gamma)} t_{(\gamma)}^{\alpha} \quad (1.57)$$

Sie sind in der  $u^{\alpha}$ -Ebene nicht orthogonal, da die Weingarten Abbildung i.a. nicht symmetrisch ist. Sie lauten im einzelnen (nicht normiert)

$$t_{(1)}^1 = G M - F N = g_{22} L_{12} - g_{12} L_{22} = g(g^{11} L_{12} + g^{12} L_{22}) = g W_2^1$$

$$\begin{aligned} t_{(1)}^2 &= \frac{1}{2}(E N - G L) + g \sqrt{H^2 - K} = \frac{1}{2}(g_{11} L_{22} - g_{22} L_{11}) + g \sqrt{H^2 - K} \\ &= \frac{1}{2} g (g^{22} L_{22} - g^{11} L_{11}) + g \sqrt{H^2 - K} = \left(\frac{1}{2}(W_2^2 - W_1^1) + \sqrt{H^2 - K}\right) g \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Die Eigenwerte folgen aus der Gleichung

$$\Lambda = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{T}$$

Wird für  $\mathbf{T}$  eine andere Matrix  $\mathbf{T}^* = m\mathbf{T}$  gewählt, so ist

$$\Lambda = \mathbf{T}^{*-1} \mathbf{W} \mathbf{T}^* = (m\mathbf{T})^{-1} \mathbf{W} (m\mathbf{T}) = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{T}$$

Die Eigenvektoren sind daher nicht eindeutig aus der charakteristischen Gleichung bestimmbar. Die Eigenwerte sind jedoch eindeutig.



$$t_{(2)}^1 = t_{(1)}^2$$

$$t_{(2)}^2 = F L - E M = g_{12} L_{11} - g_{11} L_{12} = g (-g^{21} L_{11} - g^{22} L_{21}) = -g W_1^2$$

Diese Eigenvektoren sind nicht eindeutig. Eindeutigkeit wird durch Normierung erzielt, deren Ergebnis die Eigeneinheitsvektoren sind (vgl. Campbell 1980). Mittels der Eigenvektoren der Weingarten Abbildung lassen sich die Vektoren der Hauptkrümmungsrichtungen im  $\mathbb{R}^3$  angeben. Sie lauten (nicht normiert)

$$k_{i.(\gamma)} = t_{(\gamma)}^\alpha x_{i,\alpha} \quad (1.58)$$

Sie liegen in der Tangentialebene der Fläche, da sie eine Linearkombination der Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien sind, und sind orthogonal zueinander. Umgekehrt lassen sich aus diesen 3D-Vektoren die 2D-Vektoren  $t_{(\gamma)}^\alpha$  der Hauptkrümmungsrichtungen bestimmen. Ausgehend von (1.58) erhält man durch Überschiebung mit  $x_{i,\beta}$  und  $g^{\beta\epsilon}$

$$k_{i.(\gamma)} = t_{(\gamma)}^\alpha x_{i,\alpha}$$

$$k_{i.(\gamma)} x_{i,\beta} = t_{(\gamma)}^\alpha x_{i,\alpha} x_{i,\beta} = t_{(\gamma)}^\alpha g_{\alpha\beta}$$

$$k_{i.(\gamma)} x_{i,\beta} g^{\beta\epsilon} = t_{(\gamma)}^\alpha g_{\alpha\beta} g^{\beta\epsilon} = t_{(\gamma)}^\alpha \delta_\alpha^\epsilon = t_{(\gamma)}^\epsilon$$

Zusammenfassend gilt:

$$t_{(\gamma)}^\epsilon = k_{i.(\gamma)} x_{i,\beta} g^{\beta\epsilon} \quad (1.59)$$

Zur Überprüfung kann (1.58) in (1.59) eingesetzt werden:

$$t_{(\gamma)}^\epsilon = t_{(\gamma)}^\alpha x_{i,\alpha} x_{i,\beta} g^{\beta\epsilon} = t_{(\gamma)}^\alpha g_{\alpha\beta} g^{\beta\epsilon} = t_{(\gamma)}^\alpha \delta_\alpha^\epsilon = t_{(\gamma)}^\epsilon$$

### 1.7.3 Hauptkrümmungsrichtungen

Die Richtung der Hauptkrümmungen in der  $u^\alpha$ -Ebene bezogen auf eine vorgegebene Richtung  $\nu^\alpha$  ergibt sich aus dem Vektorprodukt der Eigenvektoren  $t_{(\gamma)}^\alpha$  mit dem vorgegebenen Vektor

$$\cos \varphi(\gamma) = \frac{g_{\alpha\beta} t_{(\gamma)}^\alpha \nu^\beta}{\| t_{(\gamma)}^\epsilon \| \| \nu^\mu \|} \quad (1.60)$$

Wird die  $u^1$ -Linie als Bezugslinie gewählt, sodaß  $\nu^\beta$  den Tangentenvektor an die  $u^1$ -Linie bezeichnet mit

$$\| \nu^\alpha \| = \sqrt{g_{\alpha\beta} \nu^\alpha \nu^\beta} = 1$$

so gilt

$$\nu_1^\beta = \frac{1}{\sqrt{g_{\beta\beta}}} \delta_1^\beta$$

und somit

$$\cos \varphi(\gamma) = \frac{g_{\alpha\beta} t_{(\gamma)}^{\alpha} \delta_1^{\beta}}{\sqrt{t_{(\gamma)}^{\epsilon} t_{(\gamma)}^{\mu} g_{\epsilon\mu} \sqrt{g_{\beta\beta}}}} \quad (1.61)$$

Zur Bestimmung des Winkels  $\varphi(\gamma)$  können auch die 3D-Vektoren  $k_{i,(\gamma)}$  herangezogen werden. Die Formeln lauten analog

$$\cos \varphi(\gamma) = \frac{k_{i,(\gamma)} x_{i,\beta}}{\|k_{m,(\gamma)}\| \|x_{n,\beta}\|} \quad (1.62)$$

Die Bezugsrichtung wird durch die Wahl des Tangentenvektors  $x_{i,\alpha}$  an die Koordinatenlinie  $u^{\alpha}$  mit  $\alpha = 1$  oder  $\alpha = 2$  festgelegt. Aus (1.62) kann unmittelbar (1.61) mit der  $u^1$ -Linie als Bezugslinie abgeleitet werden, indem  $k_{i,(\gamma)}$  aus (1.58) eingesetzt wird:

$$\cos \varphi(\gamma) = \frac{k_{i,(\gamma)} x_{i,\beta} \delta_1^{\beta}}{\|k_{m,(\gamma)}\| \|x_{n,\beta} \delta_1^{\beta}\|} = \frac{t_{(\gamma)}^{\alpha} x_{i,\alpha} x_{i,\beta} \delta_1^{\beta}}{\|t_{(\gamma)}^{\epsilon} x_{i,\epsilon}\| \|x_{i,\beta} \delta_1^{\beta}\|} = \frac{g_{\alpha\beta} t_{(\gamma)}^{\alpha} \delta_1^{\beta}}{\sqrt{t_{(\gamma)}^{\epsilon} t_{(\gamma)}^{\mu} g_{\epsilon\mu} \sqrt{g_{\beta\beta}}}} \quad (1.63)$$

#### 1.7.4 Quadrierte Weingarten Abbildung

Neben der Hesse-Matrix selbst wird in der digitalen Bildverarbeitung auch die quadrierte Hesse-Matrix genutzt. Aus diesem Grund soll hier die quadrierte Weingarten Abbildung als Verallgemeinerung der quadrierten Hesse-Matrix eingeführt werden.

Die quadrierte Weingarten Abbildung folgt aus

$$W_{Q\beta}^{\alpha} = W_{\gamma}^{\alpha} W_{\beta}^{\gamma} \quad (1.64)$$

Die einzelnen Elemente lauten

$$W_{Q1}^1 = W_1^1 W_1^1 + W_2^1 W_1^2$$

$$W_{Q2}^1 = W_1^1 W_2^1 + W_2^1 W_2^2 = W_2^1 (W_1^1 + W_2^2)$$

$$W_{Q1}^2 = W_1^2 W_1^1 + W_2^2 W_1^2 = W_1^2 (W_1^1 + W_2^2)$$

$$W_{Q2}^2 = W_1^2 W_2^1 + W_2^2 W_2^2$$

Die quadrierte Weingarten Abbildung ist somit wie die Weingarten Abbildung selbst nicht symmetrisch. Die Spur der quadrierten Weingarten Abbildung ist

$$\text{tr}(W_{Q\beta}^{\alpha}) = W_{Q1}^1 + W_{Q2}^2 = W_1^1 W_1^1 + W_2^2 W_2^2 + 2 W_2^1 W_1^2 \quad (1.65)$$

und die Determinante

$$\det(W_{Q\beta}^{\alpha}) = W_{Q1}^1 W_{Q2}^2 - W_{Q2}^1 W_{Q1}^2 = (W_1^1 W_2^2 - W_2^1 W_1^2)^2 = (\det(W_{\nu}^{\mu}))^2 \quad (1.66)$$

Die Eigenwerte können aus der zugehörigen charakteristischen Gleichung oder über den nachfolgend beschriebenen Weg bestimmt werden. Es sei  $\mathbf{W} = (W_{\beta}^{\alpha})$  und  $\mathbf{T}$  die Matrix der Eigenvektoren  $t_{(\gamma)}^{\alpha}$  von  $\mathbf{W}$ , dann ist

$$\mathbf{W} \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \quad (1.67)$$

mit der Diagonalmatrix  $\mathbf{\Lambda}$  der Eigenwerte. Sind die Eigenwerte  $\lambda_{(\gamma)}$  der Weingarten Abbildung verschieden voneinander, d.h. Nabelpunkte sind ausgeschlossen, dann sind die Eigenvektoren linear unabhängig. Somit ist  $\mathbf{T}$  regulär und es existiert die Inverse  $\mathbf{T}^{-1}$ , so daß

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (1.68)$$

gilt. Die quadratische Weingarten Abbildung  $W_Q \beta^{\alpha}$  kann daher wie folgt geschrieben werden:

$$(W_Q \beta^{\alpha}) = \mathbf{W} \mathbf{W} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}_Q \mathbf{T}^{-1} \quad (1.69)$$

Dies bedeutet, daß die Weingarten Abbildung und die quadrierte Weingarten Abbildung dieselben Eigenvektoren besitzen und die Eigenwerte  $\lambda_Q$  den Quadraten der Eigenwerte  $\lambda$  und somit den Quadraten der Hauptkrümmungen entsprechen. Da

$$\text{tr} \mathbf{W} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad , \quad \det \mathbf{W} = \lambda_1 \lambda_2 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{W} \mathbf{W}) = \det \mathbf{W} \det \mathbf{W}$$

gilt, ist dies in Übereinstimmung mit (1.66). Die Eigenwerte  $\lambda_Q$  sind wie die Eigenwerte  $\lambda$  reell (vgl. (1.56)).

**Anmerkung 1.8** Neben der Eigenwertzerlegung von Matrizen ist eine Singulärwertzerlegung definiert. Für eine Singulärwertzerlegung einer quadratischen Matrix gilt allgemein:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (1.70)$$

mit

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

d. h.  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  sind zwei orthogonale Matrizen. Sie enthalten die (orthogonalen) Eigenvektoren der symmetrischen Matrizen

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{S}_Q \mathbf{U}^T \quad (1.71)$$

und

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{S}_Q \mathbf{V}^T \quad (1.72)$$

Ist  $\mathbf{A}$  symmetrisch, so daß  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  gilt, folgt  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$  und somit

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (1.73)$$

mit  $\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda}$ . Für  $k_{n1} \neq k_{n2}$  ist  $\mathbf{T}$  regulär, aber i. a. nicht orthogonal.  $\mathbf{T}$  ist orthogonal, falls die Weingarten Abbildung symmetrisch ist. •

## 1.8 Krümmungsmaße von Graphenflächen

Zur Beschreibung von dreidimensionalen Flächen werden oftmals 2.5D-Repräsentationsformen gewählt. Ein Beispiel hierfür ist das Digital Höhenmodell, das durch

$$x_i = x_i(u^\alpha) = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ x_{3,1}(u^\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

gegeben ist. Durch diese Repräsentation vereinfachen sich die oben angegebenen Formeln der differentialgeometrischen Größen. Die 1. Ableitungen nach den Flächenkoordinaten  $u^\alpha$  sind in diesem Fall durch

$$x_{i,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_{3,1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_{i,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x_{3,2} \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

gegeben, wodurch für die Komponenten und die Determinante des ersten Fundamentaltensors

$$g_{11} = 1 + x_{3,1}^2 \quad g_{12} = x_{3,1} x_{3,2} \quad g_{22} = 1 + x_{3,2}^2 \quad g = 1 + x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2 \quad (1.76)$$

folgt. Der Flächennormalenvektor ist durch

$$n_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} -x_{3,1} \\ -x_{3,2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

gegeben. Die 2. Ableitungen lauten

$$x_{i,11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{3,11} \end{pmatrix} \quad x_{i,12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{3,12} \end{pmatrix} \quad x_{i,22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{3,22} \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Die Komponenten des zweiten Fundamentaltensors sind daher durch

$$L_{11} = \frac{x_{3,11}}{\sqrt{g}} \quad L_{12} = \frac{x_{3,12}}{\sqrt{g}} \quad L_{22} = \frac{x_{3,22}}{\sqrt{g}} \quad (1.79)$$

gegeben. Seine Determinante lautet

$$l = \frac{1}{g} (x_{3,11} x_{3,22} - x_{3,12}^2) \quad (1.80)$$

Basierend auf diesen Größen ergeben sich die Gauß'sche und mittlere Krümmung zu

$$K = \frac{1}{g^2} (x_{3,11} x_{3,22} - x_{3,12}^2) \quad (1.81)$$

und

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + x_{3,2}^2) x_{3,11} + (1 + x_{3,1}^2) x_{3,22} - 2 x_{3,1} x_{3,2} x_{3,12}}{(1 + x_{3,1}^2 + x_{3,2}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.82)$$

Die Hauptkrümmungen folgen dann aus (1.45).

**Anmerkung 1.9 (Relation zwischen Hesse-Matrix und Weingarten Abbildung)**

Vernachlässigt man die lokale Metrik <sup>8</sup>, d. h. man setzt

$$g_{\alpha\beta} := \delta_{\alpha\beta} \quad (1.83)$$

und nutzt zur Bestimmung des zweiten Fundamentaltensors statt der Flächennormalen die  $x_3$ -Richtung <sup>9</sup>, also

$$L_{\alpha\beta} := z_i \cdot x_{i,\alpha\beta} = x_{3,\alpha\beta} \quad (1.84)$$

mit

$$z_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (1.85)$$

folgt für die Weingarten Abbildung <sup>10</sup> aus (1.52)

$$W_\beta^\alpha = x_{3,\alpha\beta} \quad (1.86)$$

Die mit diesen Vernachlässigungen erhaltene Weingarten Abbildung entspricht somit der Hesse-Matrix der Funktion  $x_3(u^\alpha)$

$$H_{\alpha\beta} = \partial\partial^T x_3 = \begin{pmatrix} x_{3,11} & x_{3,12} \\ x_{3,21} & x_{3,22} \end{pmatrix} = x_{3,\alpha\beta} \quad (1.87)$$

mit

$$\partial^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (1.88)$$

In der digitalen Signalverarbeitung wird diese Matrix häufig zur approximativen Beschreibung der lokalen Krümmungsverhältnisse des Signals verwendet. Im Gegensatz zur Weingarten Abbildung nach (1.52) handelt es sich bei der Hesse-Matrix um eine symmetrische  $2 \times 2$ -Matrix, so daß die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen aus einer wie bei Jähne 1989 S.135 angegebenen Hauptachsentransformation bestimmt werden können. Analog zu (1.67) gilt

$$\mathbf{HT} = \mathbf{TA} \quad (1.89)$$

---

<sup>8</sup>Diese Vernachlässigung entspricht der Annahme von Koordinaten mit  $g_{11} = g_{22} = \text{const.}$  und  $g_{12} = 0$ , so daß nur ein gemeinsamer Maßstab zu berücksichtigen ist, d. h.

$$g_{\alpha\beta} = \sqrt{g} \delta_{\alpha\beta}$$

und der Festlegung, daß  $g = 1$ .

<sup>9</sup>Diese Vereinfachung führt bis auf einen Maßstabsfaktor  $\frac{1}{\sqrt{g}}$  zu identischen Ergebnissen, was aus einem Vergleich mit

$$L_{\alpha\beta} = n_i \cdot x_{i,\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{g}} x_{3,\alpha\beta}$$

folgt, da die ersten beiden Komponenten der 2.Ableitungen Null sind.

<sup>10</sup>Berechnet man die Weingarten Abbildung nur mit der Annahme  $g_{11} = g_{22} = \sqrt{g}$ , so gilt

$$W_\beta^\alpha = \frac{1}{g} \delta^{\alpha\gamma} x_{3,\gamma\beta} = \frac{1}{g} x_{3,\alpha\beta}$$

und

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{T} \quad (1.90)$$

mit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tan 2\phi = \frac{2H_{12}}{H_{11} - H_{22}} \quad (1.91)$$

wobei die Eigenwerte den Hauptkrümmungen und der Winkel  $\phi$  der Hauptkrümmungsrichtung entsprechen. •

### Anmerkung 1.10 (Quadratische Variation)

Zur Rekonstruktion von Flächen werden häufig Funktionen zur Regularisierung<sup>11</sup> benötigt, die in der Regel auf einer Modellannahme bzw. Vorinformation über die Fläche basieren<sup>12</sup>. Stevenson und Delp 1992 geben die Funktion

$$S = \int_{\mathcal{F}} (2H^2 - K) dF \quad (1.92)$$

als eine mögliche invariante Funktion<sup>13</sup> an. Geht man davon aus, daß die ersten Ableitungen von  $x_3$  klein sind, also<sup>14</sup>

$$x_{3,\alpha} \approx 0 \quad (1.93)$$

so folgt, daß die Determinante des Metriktensors  $g \approx 1$  und ferner sich die (1.81) und (1.82) vereinfachen zu:

$$K \approx x_{3,11} x_{3,22} - x_{3,12}^2 \quad (1.94)$$

$$H \approx \frac{x_{3,11} + x_{3,22}}{2} \quad (1.95)$$

Setzt man diese Größen in (1.92) ein, so erhält man als Ergebnis das Integral über die quadratische Variation:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} (x_{3,11}^2 + 2x_{3,12}^2 + x_{3,22}^2) dF \quad (1.96)$$

Der Ausdruck unter dem Integral ist die Spur der quadrierten Hesse-Matrix und somit die Quadratsumme der Hauptkrümmungen. •

<sup>11</sup>Die Terme der zu minimierenden Funktion, die auf die zur Regularisierung eingeführten Funktionen (*stabilizers*) basieren, werden auch als Stabilisierungsterme bezeichnet. Vgl. Delingette 1994a zur Regularisierung von ebenen Kurven und Terzopoulos 1986 zur Regularisierung von 2.5D-Flächen.

<sup>12</sup>vgl. z. B. Reiß 1985: Die Vorinformation wird über sog. *fiktive* Beobachtungen mit Erwartungswert gleich Null in das Gauß-Markoff-Modell eingeführt. Bei diesen Beobachtungen kann es sich z. B. um Krümmungen bzw. 2.Ableitungen einer Funktion oder auch um eine andere Funktion z. B. die quadratische Variation handeln.

<sup>13</sup>Diese Funktion ist invariant, da zum einen  $K$  unabhängig von der Parametrisierung und der Einbettung der Fläche im Raum ist. Für das Vorzeichen von  $H$  gilt dies nicht, jedoch tritt nicht  $H$ , sondern das Quadrat der mittleren Krümmung auf, sodaß hierfür wiederum Unabhängigkeit von der Parametrisierung und Einbettung im Raum gilt. vgl. auch dritte Fundamentalform in (1.49).

<sup>14</sup>Dies entspricht der Vernachlässigung der Metrik gemäß (1.83).

**Anmerkung 1.11** Zur Bestimmung der Krümmung einer Isolinie  $\mathcal{I}$  wird der Normalenvektor  $n_i$  in eine Ebene mit  $x_{3,\mathcal{I}} = \text{const.}$  abgebildet und normiert

$$n_{\alpha,\mathcal{I}} = \frac{n_i \cdot e_{i,\alpha}}{\sqrt{n_\beta \cdot n_\beta}} = \frac{-x_{i,\alpha}}{\sqrt{n_\beta \cdot n_\beta}} = \frac{-\partial x_{3.}}{\|\partial x_{3.}\|} \quad (1.97)$$

mit  $e_{i,\alpha}$  als Einheitsvektoren in Richtung der Achsen  $\alpha = 1, 2$  des kartesischen Koordinatensystems. Der Tangentenvektor an  $\mathcal{I}$  folgt aus

$$t_{\alpha,\mathcal{I}} n_{\alpha,\mathcal{I}} = 0 \quad (1.98)$$

zu

$$t_{\alpha,\mathcal{I}} = \frac{1}{\|\partial x_{3.}\|} \begin{pmatrix} x_{3,2} \\ -x_{3,1} \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

Der Betrag der Krümmung von  $\mathcal{I}$  kann dann mittels

$$|k_{\mathcal{I}}| = |H_{\alpha\beta} t_{\alpha,\mathcal{I}} t_{\beta,\mathcal{I}}| \quad (1.100)$$

bestimmt werden. Das Vorzeichen der Krümmung ist abhängig von der Definition der Kurvennormalen  $n_{\alpha,\mathcal{I}}$  und des Tangentenvektors  $t_{\alpha,\mathcal{I}}$ <sup>15</sup> •

## 1.9 Alternative Krümmungsmaße

Neben der Gauß'schen und mittleren Krümmung gibt es alternative Krümmungsmaße, die ebenfalls Funktionen der Hauptkrümmungen sind. Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Krümmungsmaßen besteht in der unterschiedlichen Darstellung der Krümmungsverhältnisse, d. h. die unterschiedlichen Krümmungsmaße führen z. B. zu einer Rotation des zur Darstellung der Krümmungsverhältnisse definierten ebenen Koordinatensystems (vgl. Besl 1990, S.174). Zwei dieser Alternativen werden im folgenden aufgezeigt, sowie weitere Krümmungsmaße angegeben.

**Alternative A** Ein Krümmungsmaß ist die mittlere Krümmung

$$H = \frac{k_{n1} + k_{n2}}{2} \quad (1.101)$$

Als zweites Krümmungsmaß dient die Hälfte der Differenz der beiden Hauptkrümmungen

$$\Delta H = \frac{k_{n1} - k_{n2}}{2} \quad (1.102)$$

---

<sup>15</sup>Beide Vektoren können jeweils für sich mit umgekehrtem Vorzeichen definiert werden. Dies ist abhängig von der Parametrisierung der Fläche und der daraus resultierenden Flächennormalen, sowie von der (fiktiven) Parametrisierung der Kurve  $\mathcal{I}$ , d. h. die Festlegung entscheidet ob die Normale einer geschlossenen Fläche oder Kontour nach innen oder außen zeigt (vgl. Heitz 1988, S.104).

**Alternative B** Die Krümmungsmaße werden als Polarkoordinaten definiert:

$$R^2 = \frac{k_{n1}^2 + k_{n2}^2}{2} = H^2 + \Delta H^2 \quad (1.103)$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{k_{n2}}{k_{n1}}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{\Delta H}{H}\right) \quad (1.104)$$

Für  $\Phi = 0$  liegt ein Nabelpunkt mit  $k_n = \text{const.} \neq 0$  und für  $\Phi = \frac{\pi}{2}$  liegt ein Minimalpunkt ( $k_{n1} = -k_{n2}$ ) vor. Für einen Nabelpunkt  $P_N$  mit  $k_n = \text{const.} = 0$ , d. h. die Fläche ist lokal eine Ebene, ist  $\Phi$  unbestimmt.

**Alternative C** Ein weiteres Krümmungsmaß ist die absolute Krümmung

$$k_{abs} = |k_{n1}| + |k_{n2}| \quad (1.105)$$

(vgl. Farin 1988, S.296).

**Alternative D** Auf der Grundlage der Normalkrümmungen kann weiterhin die durchschnittliche Krümmung  $k_\emptyset$  definiert werden. Sie ist im diskreten Fall durch

$$k_\emptyset = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_l \in \mathcal{N}} k_n(k, l) \quad (1.106)$$

mit  $\mathcal{N}$  = Nachbarschaft und  $|\mathcal{N}|$  = Anzahl der Punkte der Nachbarschaft gegeben (vgl. Abschnitt 2.2).

**Alternative E** Ein weiteres, mit Alternative D eng verknüpftes Krümmungsmaß läßt sich aus einer 3D-Hough-Transformation angeben (vgl. z. B. Krishnapuram und Casasent 1989). Ist eine Tangentialebene  $\mathcal{T}$  an die Fläche  $\mathcal{F}$  durch ihre Normale  $n_{i,\mathcal{T}}$  gegeben, so gilt:

$$d = n_{i,\mathcal{T}} x_{i,l} = \text{const.} \quad \forall P_l \in \mathcal{T} \quad (1.107)$$

Hierbei bezeichnet  $d$  den orthogonalen Abstand des Koordinatensystemursprungs von der Tangentialebene. Für eine Nachbarschaft  $\mathcal{N}$  können die Größen

$$\bar{d} = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_l \in \mathcal{N}} n_{i,\mathcal{T}} x_{i,l} \quad (1.108)$$

und

$$\sigma_d^2 = \frac{1}{|\mathcal{N}| - 1} \sum_{P_l \in \mathcal{N}} (n_{i,\mathcal{T}} x_{i,l} - \bar{d})^2 \quad (1.109)$$

bestimmt werden.  $\sigma_d^2$  ist ein Maß, das die Abweichung der Punkte von der Tangentialebene kennzeichnet. Für  $\sigma_d^2 = 0$  liegen alle Punkte der Nachbarschaft innerhalb der Tangentialebene.



**Alternative F** Im Abschnitt 1.8 wurde die quadratische Variation als eine mögliche Regularisierungsfunktion zur Rekonstruktion einer Graphenfläche vorgestellt. Die in (1.92) angegebene allgemeine Regularisierungsfunktion läßt sich ebenfalls für 3D-Flächen aufstellen.  $H$  und  $K$  können hierfür durch die Komponenten der Weingarten Abbildung gemäß (1.53) und (1.54) dargestellt werden, so daß

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} (W_1^1 W_1^1 + 2 W_2^1 W_1^2 + W_2^2 W_2^2) dF \quad (1.110)$$

folgt. Der Ausdruck unter dem Integral ist wegen (1.56) positiv oder Null und entspricht der Spur der quadrierten Weingarten Abbildung.

Führt man die bereits die in Abschnitt 1.8 für Graphenflächen angegebenen Vereinfachungen ein, folgt hieraus direkt die in (1.96) dargestellte quadratische Variation. Diese kann wie (1.110) zur Klassifikation von ebenen Flächenbereichen genutzt werden.

**Diskussion** Die aufgeführten alternativen Krümmungsmaße geben wie die Gauß'sche und mittlere Krümmung keine Information über die Krümmungsrichtung. Sie können im wesentlichen nur zu einer Klassifikation von Flächen(bereichen) herangezogen werden (vgl. Abschnitt 6.1). Hierbei sind die Alternativen A und B der Gauß'schen und mittleren Krümmung gleichwertig. Alternativen C, D und E bieten nur eine binäre Klassifikationsmöglichkeit, da es sich nur um ein Krümmungsmaß handelt, welches größer oder gleich Null ist,

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad : \text{Ebene} \\ k > 0 & \quad : \text{beliebige andere Fläche} \end{aligned}$$

so daß die Maße aus C und D gegenüber den anderen dargestellten Maßen einen Informationsverlust beinhalten. Dies gilt ebenso für die quadratische Variation und ihre Verallgemeinerung.

### 1.10 Analogien zwischen Kurven im $\mathbb{R}^2$ und Flächen im $\mathbb{R}^3$

Bei der Darstellung der differentialgeometrischen Grundlagen von Flächen wurde bereits auf Analogien zwischen Größen zur Beschreibung von ebenen Kurven und Flächen im  $\mathbb{R}^3$  hingewiesen. In Abb. 1-3 sind zur Verdeutlichung die entsprechenden Größen gegenübergestellt worden.

| Bezeichnung         | $\mathcal{C} : x_\alpha(u)$                                                                                                                     | $\mathcal{F} : x_i(u^\alpha)$                                                                       |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.Ableitung         | $x_{\alpha,u}$                                                                                                                                  | $x_{i,\alpha}$                                                                                      |
| 1.Fundamentaltensor | $g_{\mathcal{C}} = x_{\alpha,u} x_{\alpha,u}$                                                                                                   | $g_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta}$<br>$g = \det(g_{\alpha\beta})$                         |
| Normale             | aus $n_\alpha \cdot x_{\alpha,u} = 0$<br>$n_\alpha = \frac{1}{\ x_{\alpha,u} x_{\alpha,u}\ } \begin{pmatrix} -x_{2,u} \\ x_{1,u} \end{pmatrix}$ | $n_i = \frac{\varepsilon_{ijk} \cdot x_{j,1} x_{k,2}}{\ \varepsilon_{lmn} \cdot x_{m,1} x_{n,2}\ }$ |
| 2.Ableitung         | $x_{\alpha,uu}$                                                                                                                                 | $x_{i,\alpha\beta}$                                                                                 |
| 2.Fundamentaltensor | $L_{\mathcal{C}} = n_\alpha \cdot x_{\alpha,uu}$                                                                                                | $L_{\alpha\beta} = n_i \cdot x_{i,\alpha\beta}$<br>$l = \det(L_{\alpha\beta})$                      |
| Krümmungsmaß        | $k = \frac{1}{g_{\mathcal{C}}} L_{\mathcal{C}}$                                                                                                 | $W_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} L_{\gamma\beta}$                                                 |

**Abb. 1-3:** Analogien Kurve  $\in \mathbb{R}^2$  - Fläche  $\in \mathbb{R}^3$

## 2 Bestimmung von Krümmungsmaßen aus beliebig verteilten diskreten Flächenpunkten

In vielen Anwendungsbereichen sind die zu behandelnden Flächen nicht in parametrisierter Form, sondern durch die Koordinaten diskreter Flächenpunkte gegeben. Im folgenden sollen solche Flächen betrachtet und Wege zur Bestimmung von Krümmungsmaßen aufgezeigt werden.

**Aufgabenstellung** Gegeben seien die 3D-Koordinaten  $x_{i,k}$  von Punkten  $P_k \in \mathcal{F}$ . Gesucht ist die Normalkrümmung einer durch die Punkte  $P_k$  und  $P_l$  gegebenen Flächenkurve, sowie die Hauptkrümmungen im Punkt  $P_k$ .

**Lösung** Die Aufgabenstellung kann folgendermaßen gelöst werden:

- Bestimmung der Flächennormalen  $n_{i,k}$
- Bestimmung der Normalkrümmung für die Flächenkurve durch  $P_k$  und  $P_l$
- Bestimmung der minimalen und maximalen Normalkrümmung für die Flächenkurve durch die Punkte  $P_k$  und  $P_m \in \mathcal{N}$ , wobei  $\mathcal{N}$  die Nachbarschaft des Punktes  $P_k$  bezeichnet

Gauß'sche und mittlere Krümmung können dann mittels (1.47) und (1.48) bestimmt werden. Die Gauß'sche Krümmung kann ebenfalls basierend auf (1.51), d.h. ohne die Bestimmung der Hauptkrümmungen, berechnet werden, falls eine Triangulierung vorliegt. Diese Vorgehensweise wird im folgenden ebenfalls beschrieben.

### 2.1 Flächennormalenvektoren

Für die Bestimmung der Flächennormalenvektoren  $n_{i,k}$  in den Flächenpunkten  $P_k$  kann die jeweilige Momentenmatrix

$$\begin{aligned}\hat{M}_{i,j,k} &= \left( \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_m \in \mathcal{N}} (x_{i,m} - x_{i,k})(x_{j,m} - x_{j,k}) p_m \right) \\ &= \left( \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_m \in \mathcal{N}} d_{i,m} d_{j,m} p_m \right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit  $|\mathcal{N}|$  gleich der Anzahl der Punkte der Nachbarschaft genutzt werden (Besl 1990, Fua und Sander 1992). Hierbei können unterschiedliche Gewichte, z. B. als Funktion des Betrages von  $d_{i,m}$  berücksichtigt werden. Es handelt sich bei der Momentenmatrix um eine  $3 \times 3$  Matrix mit i.a. vollem Rang. Besitzt sie für Nachbarschaften mit  $|\mathcal{N}| \geq 3$  keinen vollen Rang, bestehen lineare Abhängigkeiten der Punktkoordinaten, z. B. liegen für  $|\mathcal{N}| = 3$  die Punkte in einer Ebene. In diesem Fall ist

$$\det(\hat{M}_{i,j,k}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 0$$

und somit ein Eigenwert gleich Null. Falls  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3$  die Eigenwerte der Matrix  $\hat{M}_{ij,k}$  ungleich Null sind und  $\hat{m}_{i,m}$  mit  $m \in \{1, 2, 3\}$  die zugehörigen Eigenvektoren, dann gilt

$$\hat{n}_{i,k} = \hat{m}_{i,1}$$

d. h. der Eigenvektor mit dem zugehörigen kleinsten Eigenwert ist der Flächennormalenvektor:

$$\hat{n}_{i,k} = \{\hat{m}_{i,m} \mid \lambda_m = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}\} \quad (2.2)$$

Die so bestimmte Flächennormale ist orthogonal zu der ausgleichenden Ebene durch die Punktwolke der Nachbarschaft  $\mathcal{N}$ . Ist die Determinante von  $\hat{M}_{ij,k}$  gleich Null, so kann die Flächennormale durch

$$\hat{n}_i = \frac{\varepsilon_{ijk} \cdot d_{j,p} \cdot d_{k,q}}{\|\varepsilon_{lmn} \cdot d_{m,p} \cdot d_{n,q}\|} \quad (2.3)$$

bestimmt werden, wobei für  $P_p$  und  $P_q$  zwei beliebige Punkte der Nachbarschaft  $\mathcal{N}$  gewählt werden können, die nicht kollinear mit  $P_k$  sind. Auf diese Weise können mehrere Lösungen bestimmt und anschließend gemittelt werden.

Falls eine Triangulierung vorliegt besteht eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Flächennormalen im Punkt  $P_k$ . Hierzu werden die Flächennormalen der Dreiecke mit  $P_k$  als einem Eckpunkt berechnet und gemittelt.

### 2.1.1 Mittelung von Flächennormalenvektoren

Eine Mittelung von Flächennormalenvektoren ist erforderlich, wenn mehrere Flächennormalen nach (2.3) bestimmt wurden oder eine Triangulierung vorliegt und die Flächennormale im Punkt  $P_k$  aus den Flächenormalen der anliegenden Dreiecke bestimmt werden soll. Die Mittelbildung erfolgt in zwei Teilschritten (vgl. Förstner und Braun 1992). Zuerst wird die Summe der Flächennormalen (ggf. unter Berücksichtigung unterschiedlicher Gewichte) berechnet:

$$\bar{n}_i^* = \sum_{j=1}^a \hat{n}_{i,j} p_j \quad (2.4)$$

mit  $a$  der Anzahl der Dreiecke und  $p_j$  dem Gewicht der  $j$ . Flächennormale. Für diesen Vektor gilt i. a.  $\|\bar{n}_i^*\| \neq 1$ , so daß er noch normiert werden muß und sich somit der gesuchte Flächennormalenvektor ergibt:

$$\bar{n}_i = \frac{\bar{n}_i^*}{\|\bar{n}_i^*\|} \quad (2.5)$$

Wegen dieser Normierung kann (2.4) anstatt eines gewogenen Mittels benutzt werden. Die Gewichte in (2.4) können z. B. in Abhängigkeit der Größe der Dreiecke oder in Abhängigkeit von

$$\cos \varphi_j = \frac{d_{j,p} \cdot d_{j,q}}{\|d_{m,p}\| \|d_{n,q}\|} \quad (2.6)$$

z. B.

$$p_j = 1 - |\cos \varphi_j| \quad (2.7)$$

oder einer Funktion beider Größen gewählt werden. Anstatt nur die Dreiecke, die direkt im Punkt  $P_k$  zusammenstoßen, zu nutzen, können auch noch benachbarte Dreiecke miteinbezogen werden (vgl. Chen und Medioni 1994).

## 2.2 Normalkrümmung

Zur Bestimmung des Betrages der Normalkrümmung einer Flächenkurve durch die Punkte  $P_k$  und  $P_l$  seien die Normalenvektoren gegeben bzw. durch eines der oben beschriebenen Verfahren bestimmt worden. Diese Normalenvektoren definieren eine Ebene (*Normalschnitt*) und weiterhin zusammen mit den Punktkoordinaten eine Kugel. Der Schnitt von Kugel und Normalschnittebene ist ein Kreis, dessen Radius dem Kehrwert des Betrages der Normalkrümmung entspricht. Es gilt

$$\sin\left(\frac{\hat{\zeta}}{2}\right) = \frac{\|d_{i,l}\|}{2R} \quad (2.8)$$

mit  $\zeta$ , dem Zentriwinkel des Kreisbogens, und

$$\|d_{i,l}\| = \|x_{i,l} - x_{i,k}\| \quad (2.9)$$

der zugehörigen Sehne. Weiterhin ist

$$\sin\left(\frac{\hat{\zeta}}{2}\right) = \frac{\|\hat{n}_{i,l} - \hat{n}_{i,k}\|}{2} \quad (2.10)$$

so daß

$$|\hat{k}_n(k, l)| = \frac{\|\hat{n}_{i,l} - \hat{n}_{i,k}\|}{\|x_{j,l} - x_{j,k}\|} \quad (2.11)$$

folgt (vgl. Besl 1990, S.197). Das Vorzeichen der Normalkrümmung kann auf der Grundlage der Vorzeichen von

$$\cos \hat{\alpha}_l = \frac{\hat{n}_{i,l} d_{i,l}}{\|d_{i,l}\|} \quad \text{und} \quad \cos \hat{\alpha}_k = \frac{\hat{n}_{i,k} d_{i,l}}{\|d_{i,l}\|} \quad (2.12)$$

bestimmt werden. Unter der Annahme, daß sich die Normalkrümmung kontinuierlich entlang der Flächenkurve und nicht zu stark ändert, d. h. eine ausreichend hohe Punktdichte zur Repräsentation der Fläche vorliegt, können folgende Fälle auftreten:

|                     | $\cos \alpha_k < 0$ | $\cos \alpha_k = 0$ | $\cos \alpha_k > 0$ |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $\cos \alpha_l < 0$ | †                   | +                   | -                   |
| $\cos \alpha_l = 0$ | +                   | 0                   | -                   |
| $\cos \alpha_l > 0$ | +                   | -                   | †                   |

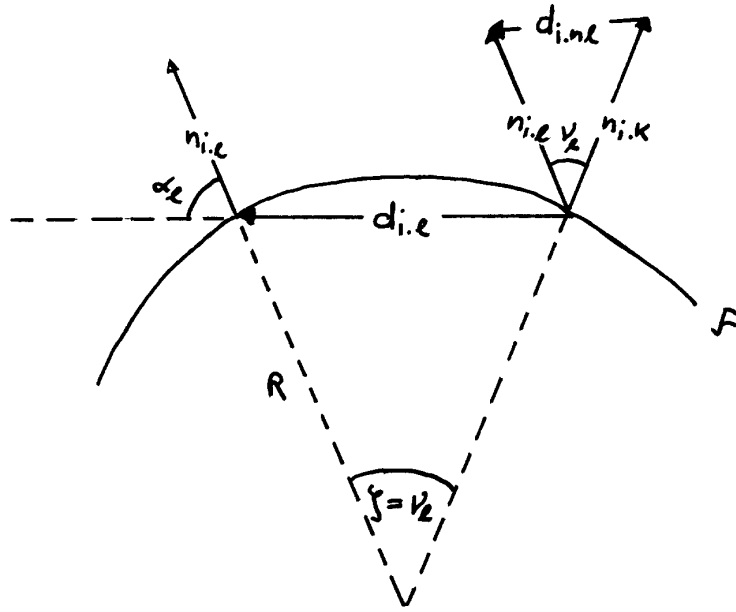


Abb. 2-1: Bestimmung der Normalkrümmung

- mit + : positives Vorzeichen, konvex
- : negatives Vorzeichen, konkav
- 0 : Null
- † : kann unter den getroffenen Annahmen nicht auftreten

Dies entspricht der Definition einer Vorzeichenfunktion wie in Hoffman und Jain 1987 oder der bei Flynn und Jain 1989 angegebenen Fallunterscheidung

$$\hat{k}_n(k, l) = \begin{cases} +|\hat{k}_n(k, l)| & \text{falls } \|x_{j,l} - x_{j,k}\| \leq \|(n_{i,l} + x_{j,l}) - (n_{j,k} + x_{j,k})\| \\ -|\hat{k}_n(k, l)| & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.3 Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen

Zur Bestimmung der Hauptkrümmungen werden die Normalkrümmungen für alle  $P_l \in \mathcal{N}$  gemäß (2.11) berechnet und für die Nachbarschaft das Maximum und das Minimum bestimmt (vgl. Arman und Aggarwal 1993).

Es seien  $P_{l_1}$  und  $P_{l_2}$  die Punkte der Nachbarschaft  $\mathcal{N}$ , bei denen die Normalkrümmung maximal bzw. minimal wird. Die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen ergeben sich aus den Koordinaten  $x_i$  der beiden Punkte  $P_{l_\gamma}$  und des Punktes  $P_k$  (nicht normiert):

$$k_{i,(\gamma)} = x_{i,l_\gamma} - x_{i,k} \quad (2.14)$$

(vgl. Besl 1990).

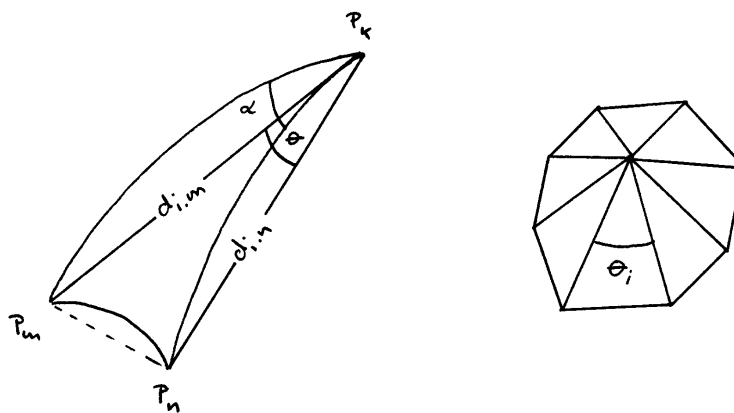


Abb. 2-2: Exzeß und Gauß'sche Krümmung

Anmerkung 2.1 Bei dieser Vorgehensweise ist jedoch zu beachten, daß i. a.

$$k_{i,1} k_{i,2} \neq 0 \tag{2.15}$$

gilt, so daß die beiden so bestimmten Hauptkrümmungsrichtungen nicht orthogonal zueinander sind. Die Abweichungen von der Orthogonalität der so bestimmten Hauptkrümmungsvektoren wird i. a. bei einer hohen Punktdichte mit gleichmäßiger räumlicher Verteilung geringer sein als bei geringer Punktdichte mit ungleichmäßiger Verteilung. Aus diesem Grund empfiehlt es sich hier eine Flächenapproximation, wie in Abschnitt 4 beschrieben, durchzuführen und die gesuchten Größen basierend auf dieser Flächenapproximation zu bestimmen. •

## 2.4 Gauß'sche Krümmung

Neben den Hauptkrümmungen wird häufig die Gauß'sche Krümmung zur Beschreibung der lokalen Krümmungsverhältnisse genutzt. In Besl und Jain 1986 und Stokely und Wu 1992 ist ein Verfahren zur Bestimmung der Gauß'schen Krümmung angegeben, das auf der Grundlage von (1.51) beruht, d.h. zu ihrer Bestimmung werden der Exzeß und die Fläche eines geodätischen Dreiecks genutzt.

Eine Fläche  $\mathcal{F}$  sei durch ebene Dreiecke repräsentiert. Ist  $P_k$  kein Randpunkt der Fläche, so gilt

$$K = \frac{3 \Delta\theta}{F} \tag{2.16}$$

mit

$$\Delta\theta = 2\pi - \sum_i \theta_i \quad \text{und} \quad F = \sum_i F_i$$

wobei  $\theta_i$  den Winkel in  $P_k$  und  $F_i$  die Fläche der Dreiecke angibt, die  $P_k$  als Eckpunkt besitzen (vgl. Abb. 2-2). Die Fläche der einzelnen Dreiecke kann über die *Heron'sche Flächenformel*

berechnet werden. Für die Herleitung von (2.16) kann man von einer  $C^2$ -stetigen Fläche  $\mathcal{F}^*$  ausgehen, die den Punkt  $P_k$  und die Nachbarnpunkte enthält. Da  $K = \text{const.}$  für (1.51) angenommen wurde, handelt es sich bei der Fläche  $\mathcal{F}^*$  um eine Kugel. Für die geodätischen Dreiecke dieser Kugel  $\mathcal{F}^*$ , die den ebenen Dreiecken zugehörig sind, gilt (1.50). Sind die Dreiecke gleichseitig, so vereinfacht sich diese Formel zu

$$\epsilon = 3 \alpha - \pi \quad (2.17)$$

Für die ebenen Dreiecke gilt

$$0 = 3 \theta - \pi \quad (2.18)$$

Subtrahiert man (2.18) von (2.17), so erhält man

$$\epsilon = 3 \alpha - 3 \theta$$

und ferner nach der Summation über alle Dreiecke (Horizontschluß)

$$\epsilon = 3 \left( \sum_i \alpha_i - \sum_i \theta_i \right) = 3(2\pi - \sum_i \theta_i) = 3 \Delta \theta \quad (2.19)$$

Setzt man dieses Ergebnis in (1.51) ein, so erhält man (2.16). Sie ist somit nur streng gültig, wenn die Triangulierung aus gleichseitigen Dreiecken besteht. Die Abweichung zur tatsächlichen Gauß'schen Krümmung wird umso größer sein, je stärker die Dreiecke von dieser Forderung abweichen.

## 2.5 Mittlere Krümmung

Die mittlere Krümmung ergibt sich als Mittelwert der Hauptkrümmungen. Sie kann jedoch auch aus den gemäß Abschnitt 2.2 bestimmten Normalkrümmungen ermittelt werden:

$$H = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{\mathcal{N}} p_l k_n(k, l) \quad (2.20)$$

Die Gewichte  $p_l$  sind hierbei als Funktion der Verteilung der Punkte  $P_l$  um den Punkt  $P_k$  zu bestimmen. Ein weiteres Verfahren zur Bestimmung der diskreten mittleren Krümmung ist in Delingette 1994b beschrieben. Die Grundidee besteht in der Schätzung einer Kugel und ihres Radius aus den Punktkoordinaten des Punktes  $P_k$  und seiner Nachbarnpunkte. Der Betrag der mittleren Krümmung ergibt sich dann als Kehrwert des geschätzten Radius.

## 2.6 Nachbarschaft

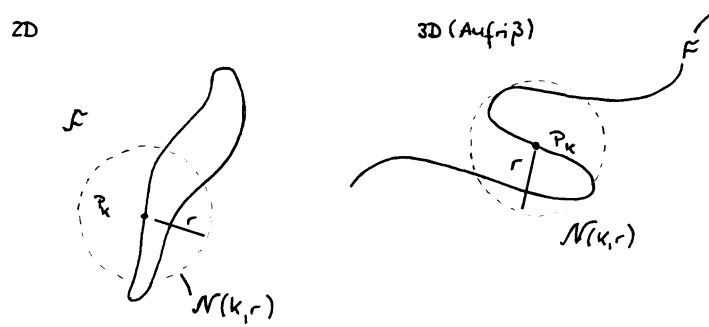
Für alle hier angegebenen Formeln wird eine Nachbarschaft  $\mathcal{N}$  benötigt. In Besl 1990, S.196 ist ein mögliches Kriterium zur Festlegung einer Nachbarschaft angegeben:

$$\mathcal{N}(k, r) = \{x_{i,m} \mid \|x_{i,m} - x_{i,k}\| \leq r\} \quad (2.21)$$

Die Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k, r)$  ist nach dieser Definition auf ein rein geometrisches Kriterium gegründet<sup>16</sup>. In 2D werden alle Punkte innerhalb eines Kreises und in 3D alle Punkte

<sup>16</sup>Eine solche sphärische Nachbarschaft wird z. B. von Fua und Sander 1992 genutzt.





**Abb. 2-3:** Nachbarschaftsproblematik

innerhalb einer Kugel mit Radius  $r$  zu dieser Nachbarschaft gezählt. Dies ist in einigen Fällen nicht ausreichend. Es ist vielmehr notwendig, topologische Information zu nutzen, falls diese, z.B. durch eine vorangegangene Triangulierung, zur Verfügung steht.

Eine weitere Möglichkeit eine Nachbarschaft zu definieren besteht in der Festlegung der Anzahl der Punkte der Nachbarschaft  $|\mathcal{N}|$ . In diesem Fall werden die  $|\mathcal{N}|$  nächsten Punkte in die Nachbarschaft eingeführt. Dies führt jedoch auch auf die oben bereits angesprochene Problematik

**Beispiel 2.1 (2D)** *Durch eine Punktmenge sei ein Bereich gegeben, in dem sich ein schmales langgestrecktes Loch befindet. Der Rand des Loches sei durch Punkte festgelegt, jedoch sei keine topologische Information vorhanden. Basierend auf dem Nachbarschaftskriterium aus (2.21) werden bei einem zu großen Radius auch Punkte von dem gegenüberliegenden Rand des Loches miteinbezogen. Wird der Radius zu klein gewählt ist ggf.  $\mathcal{N}(k, r) = \emptyset$ . Um dies zu vermeiden kann der Radius so bestimmt werden, daß eine Mindestanzahl von Punkten innerhalb der Nachbarschaft garantiert wird. Hierbei bleibt jedoch die Problematik der Einbeziehung von Punkten, die topologisch gesehen keine Nachbarn sind, bestehen.  $\square$*

**Beispiel 2.2 (3D)** *Eine beliebige Fläche im 3D sei durch die Koordinaten  $x_{i,a}$  der Flächenpunkte  $P_a$  gegeben. Weiterhin seien Punkte gegeben, die nicht der Fläche angehören. Neben der bereits im vorangegangenen Beispiel aufgezeigten Probleme treten in diesem Fall bei der Anwendung des Nachbarschaftskriteriums für  $\mathcal{N}(k, r)$  noch andere Probleme auf. Dies betrifft allgemein folgende Fälle:*

- $P_b \notin \mathcal{F}, P_b \in \mathcal{N}(k, r)$
- $P_b \in \mathcal{F}, P_b \in \mathcal{N}(k, r), P_b$  sei kein topologischer Nachbar von  $P_k$

*Im ersten Fall führt die alleinige Anwendung des Nachbarschaftskriteriums zur Einbeziehung von Punkten, die nicht zur Fläche gehören. Um eine solche Einbeziehung auszuschließen ist eine Kennzeichnung, ob die Punkte zur Fläche gehören oder nicht, ausreichend. (Erfassung*

der Kennzeichnung bei Messung, Kennzeichnung unterschiedlicher Flächen oder Flächensegmente vs. automatische Zuordnung von Punkten zu Flächen oder Flächensegmenten). Der zweite Fall tritt auf, wenn

1.  $P_b$  und  $P_k$  gegenüberliegende Punkte des Randes eines langgestreckten Loches sind (vgl. Beispiel 2D) oder
2.  $P_b$  und  $P_k$  Punkte einer stark gefalteten Fläche sind und der Abstand der Falten kleiner als  $r$  ist.

In diesem Fall ist topologische Information zur Vermeidung der Einbeziehung solcher Punkte in die Nachbarschaft notwendig.  $\square$

### 3 Bestimmung von Krümmungsmaßen aus diskreten Flächenpunkten eines Rasters $u^\alpha$

In vielen Anwendungen werden die Flächenkoordinaten  $u^\alpha$  der Flächenpunkte  $P_k$  rasterförmig vorgegeben, z. B. bei der Rastermessung mittels analytischem Plotter für die DHM-Generierung oder bei der Messung von *range images*<sup>17</sup>. Aus diesem Grund ist es sinnvoll spezielle Formeln zur Berechnung von Krümmungsmaßen für diese Anwendungen anzugeben. Hierbei ist von Vorteil, daß die Topologie implizit durch das Raster  $u^\alpha$  repräsentiert wird und somit Nachbarschaften eindeutig festgelegt sind. Die Festlegung auf die Rasterrepräsentation  $x_i = x_i(u^\alpha) = x_i(r, c)$  führt zu Einschränkungen in der Art der Fläche. Die Fläche muß sich, zumindest lokal, topologisch auf ein Raster abbilden lassen. Solche Flächen sind z. B. generalisierte Zylinder bzw. Torsen, aber auch Ellipsoid- und Kugelausschnitte bei entsprechender Wahl der Parametrisierung. Für die hier angesprochenen Flächen können grundsätzlich alle in Abschnitt 2 behandelten Verfahren genutzt werden. Durch die Rasterrepräsentation der Fläche bietet sich jedoch auch die Möglichkeit, die notwendigen Ableitungen nach den Flächenkoordinaten zu bestimmen und dann die in Abschnitt 1 angegebenen Formeln zur Bestimmung der gesuchten Größen anzuwenden (vgl. hierzu auch Abschnitt 5).

#### 3.1 Flächennormalenvektoren

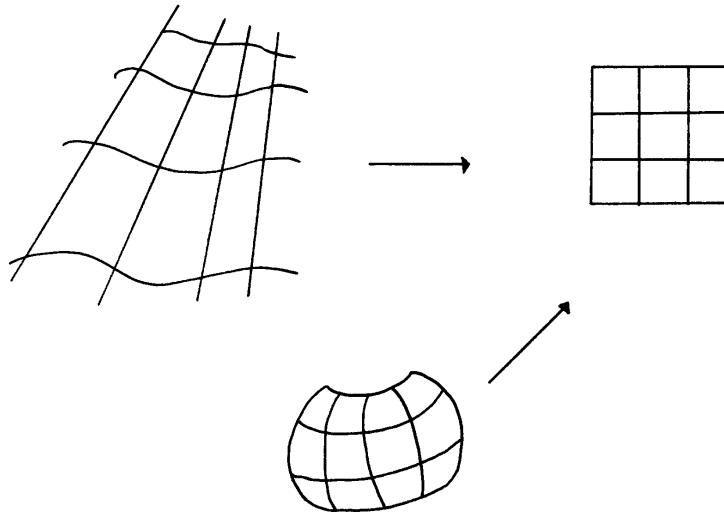
Die Bestimmung der Flächennormalen in einem Punkt  $P_k$  kann mittels (2.1) erfolgen, wobei als Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k)$  die 4er- oder 8er-Nachbarschaft gewählt werden kann. Zur Berücksichtigung der unterschiedlichen Distanzen im Raster sollte bei der 8er-Nachbarschaft eine Gewichtung durchgeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Berechnung der Flächennormalen der Dreiecke, die durch die gegenseitig benachbarten Punkte  $P_a$  und  $P_b$  in der Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k)$  und dem Punkt  $P_k$  gebildet werden und der anschließenden Mittelung dieser Flächennormalen. Die Vorinformation einer Triangulierung wird durch die Topologie des Rasters ersetzt.

Die dritte Möglichkeit ergibt sich, wie oben bereits angesprochen, aus der Rasterrepräsentation. Aufgrund dieser Repräsentation können die Ableitungen nach den Flächenkoordinaten gemäß (1.3) mittels Ableitungsoperatoren bestimmt und hieraus gemäß (1.4) die Flächennormale berechnet werden.

---

<sup>17</sup>In Besl und Jain 1986 wird die Aussage gemacht, daß alle Entfernungsbilder 2.5D-Flächen sind. Diese Aussage drückt eine Einschränkung der hierauf basierenden Verfahren zur Bearbeitung von allgemeinen 3D-Flächen aus. Diese Einschränkung besteht in der Tatsache, daß  $x_\alpha := u^\alpha$  als fehlerfrei angenommen werden und nur  $x_3$  als Beobachtung betrachtet wird (vgl. Arman und Aggarwal 1993). Bei einem mit Polarkoordinaten arbeitenden Sensor entsprechen die Flächenkoordinaten  $u^\alpha$  den Grund- und Aufwinkeln,  $x_3$  dem Radius bzw. der Entfernung. Eine Repräsentation als 2.5D-Fläche hat somit den Vorteil, daß die Entfernung zwischen einem beobachteten Punkt und dem Sensor explizit gegeben ist. Demgegenüber hat eine vollständige 3D-Repräsentation den Vorteil, daß alle  $x_i$  als fehlerhaft behandelt werden und in einem lokalen oder übergeordneten kartesischen Koordinatensystem gegeben sein können. Grund- und Aufwinkel sind weiterhin die Flächenkoordinaten  $u^\alpha$ . Sie dienen hier im wesentlichen nur zur Repräsentation der Topologie. Die Entfernung zwischen Punkt und Sensor ist nicht mehr explizit gegeben. Die Aussage von Besl und Jain 1986 ist daher dahin zu erweitern, daß sich eine ganze Reihe von Flächen topologisch auf ein Raster abbilden lassen.



**Abb. 3-1:** Beispiele zur topologischen Abbildung auf ein Raster

### 3.2 Normalkrümmung

Die Normalkrümmung einer Flächenkurve durch einen Punkt  $P_l$  und den Punkt  $P_k$  kann mittels (2.11) und (2.12) bestimmt werden. Durch das Raster bzw. die Flächenkoordinaten  $u^\alpha$  kann die Normalkrümmung einer Flächenkurve durch diese Punkte in der Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k)$  auch basierend auf

$$k_n = n_i x_i'' = L_{\alpha\beta} u^{\alpha'} u^{\beta'} = n_i x_{i,\alpha\beta} \left( \frac{du^\alpha}{ds} \right) \left( \frac{du^\beta}{ds} \right) = n_i x_{i,\alpha\beta} f^{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

wobei  $f^{\alpha\beta}$  Faktoren bezeichnet, die richtungsabhängig und somit auch metrikabhängig sind<sup>18</sup>. Die Richtung ist durch den Punkt  $P_l$  gegeben. Für die 4er-Nachbarschaft vereinfacht sich (3.1) zu

$$k_n = n_i x_{i,\alpha\alpha} f^{\alpha\alpha} \quad (3.2)$$

### 3.3 Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen

Basierend auf den Flächenkoordinaten  $(u^\alpha)_k$  und den gemessenen Koordinaten  $x_{i,k}$  können die Weingarten Abbildung, sowie deren Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden, die den Hauptkrümmungen und den Hauptkrümmungsrichtungen entsprechen.

<sup>18</sup>Flynn und Jain 1989 gehen bei ihrem Vergleich von Verfahren zur Bestimmung von Krümmungsmaßen einer 2.5D-Fläche von einem orthogonalen Raster aus, so daß  $g_{12} = 0$  ist, und setzen  $g_{11} = g_{22} = 1$ , so daß sie mit Standardableitungsoperatoren die jeweilige Richtungsableitung bestimmen können.

## 4 Bestimmung von Krümmungsmaßen auf der Basis von Flächenapproximationen

In Abschnitt 2 und Abschnitt 3 wurden Verfahren zur Bestimmung von Krümmungsmaßen direkt auf der Grundlage der diskreten Punktgeometrie diskutiert. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Approximation der diskreten Fläche durch eine Funktion und Bestimmung der Krümmungsmaße basierend auf dieser Funktion. Die Vor- und Nachteile dieser beiden Vorgehensweisen werden im Abschnitt 5 diskutiert. Als Funktionen können z. B. beliebige Polynome der Flächenkoordinaten gewählt werden, deren Koeffizienten aus den vorliegenden Daten zu bestimmen sind. Die Bestimmung der Krümmungsmaße kann dann mittels der Koeffizienten auf analytischem Weg erfolgen. Der Grad der Polynome muß so gewählt werden, daß auch die benötigten Ableitungen bestimmt werden können. Ferner ist anzumerken, daß die Wahl des Grades auch das Ergebnis der Approximation beeinflusst, da hierdurch der Typ der Fläche mitbestimmt wird. Die Verwendung von Splines ist eine andere Möglichkeit für die Wahl der Funktionen. Grundlagen von Splines sind in Reiß 1985, Farin 1988 und Hoschek und Lasser 1989 beschrieben

Bei den Verfahren zur Flächenapproximation ist zwischen lokalen und globalen Verfahren zu unterscheiden. *Lokale Verfahren* sind Verfahren, die für jeden Punkt  $P_k$  eine Flächenapproximation bestimmen<sup>19</sup>. Hierbei ist keine Stetigkeit zu der Flächenapproximation in einem Nachbarpunkt gewährleistet. Diese Verfahren dienen aus diesem Grund in der Regel nur zur Bestimmung von Flächeneigenschaften direkt im Punkt  $P_k$  (vgl. Haralick *et al.* 1983). *Globale Verfahren* zur Flächenapproximation garantieren Stetigkeit über den gesamten Bereich der Approximation und dienen häufig der Glättung und/oder der Interpolation von Daten<sup>20</sup>, wobei auch Unstetigkeiten berücksichtigt werden können (vgl. Reiß 1985, Stevenson und Delp 1992).

Im folgenden sollen lokale Verfahren betrachtet werden, die die Bestimmung von Polynomen und hieraus die direkte Bestimmung von Krümmungsmaßen zum Ziel haben.

### 4.1 Lokale Approximation von 2.5D-Flächen

In diesem Abschnitt werden lokale Approximationen von Graphenflächen  $x_3 = x_3(x_\alpha)$  in einem Punkt  $P_k$  behandelt. Das Grundprinzip besteht aus der Approximation der Fläche durch ein Polynom

$$x_3(u^\alpha) = \sum_{A+B=0}^n a_{3,AB} (u^1)^A (u^2)^B \quad (4.1)$$

wobei  $u^\alpha$  die lokalen Flächenkoordinaten mit  $u^\alpha \equiv \bar{x}_{\alpha,l} = x_{\alpha,l} - x_{\alpha,k}$ ,  $n$  den Grad des Polynoms,  $a_{3,AB}$  die Koeffizienten des Polynoms und  $P_l$  die Punkte in der Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k, r)$  bezeichnen. Je nach dem Grad des gewünschten Polynoms und somit der Anzahl der Koeffizienten sind die Nachbarschaften zu wählen, z. B. :

---

<sup>19</sup>Eine bereichsweise Flächenapproximation kann durchgeführt werden, wenn bereits eine (ggf. grobe) Segmentierung vorliegt. Eine solche Approximation bildet eine Übergangsstufe zwischen lokalen und globalen Verfahren.

<sup>20</sup>Hierzu können auch bereichsweise Flächenapproximationen dienen.

|         |                  |                                     |
|---------|------------------|-------------------------------------|
| $n = 1$ | 3 Koeffizienten  | $ \mathcal{N}  \geq 2\text{Punkte}$ |
| $n = 2$ | 6 Koeffizienten  | $ \mathcal{N}  \geq 5\text{Punkte}$ |
| $n = 3$ | 10 Koeffizienten | $ \mathcal{N}  \geq 9\text{Punkte}$ |

Die letzte Spalte gibt die Anzahl der erforderlichen linear unabhängigen Punkte an, wobei der Punkt  $P_k$  nicht mitgezählt wird. Befinden sich mehr Punkte in der festgelegten Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k, r)$  kann eine Ausgleichung zur Bestimmung der Koeffizienten durchgeführt werden. Die Beobachtungsgleichung lautet für  $n = 3$  :

$$x_3 + e_3 = a_{3,00} + a_{3,10}(u^1) + a_{3,01}(u^2) + a_{3,20}(u^1)^2 + a_{3,11}(u^1)(u^2) + a_{3,02}(u^2)^2 + a_{3,30}(u^1)^3 + a_{3,21}(u^1)^2(u^2) + a_{3,12}(u^1)(u^2)^2 + a_{3,03}(u^2)^3 \quad (4.2)$$

und in Matrixschreibweise für alle Beobachtungen

$$\mathbf{x}_3 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{X} \mathbf{a}_3. \quad (4.3)$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & u^1 & u^2 & (u^1)^2 & (u^1)(u^2) & (u^2)^2 & (u^1)^3 & (u^1)^2(u^2) & (u^1)(u^2)^2 & (u^2)^3 \\ & & & & \dots & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & \dots & & & & & \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

und dem Parametervektor der gesuchten Koeffizienten

$$\mathbf{a} = (a_{3,00}, a_{3,10}, a_{3,01}, a_{3,20}, a_{3,11}, a_{3,02}, a_{3,30}, a_{3,21}, a_{3,12}, a_{3,03})^T \quad (4.5)$$

Besitzt die Koeffizientenmatrix vollen Spaltenrang, so ist

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_3. \quad (4.6)$$

mit der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$ . Sind die Beobachtungen  $\mathbf{x}_3$  unabhängig voneinander, ist  $\mathbf{P}$  eine Diagonalmatrix. Die einzelnen Gewichte können in Abhängigkeit der Entfernung vom Punkt  $P_k$  gewählt werden. Neben dem vollen Spaltenrang der Koeffizientenmatrix ist auf die Numerik zu achten. Numerische Schwierigkeiten können bedingt durch stark unterschiedliche Größenordnungen der Diagonalelemente der Normalgleichungsmatrix auftreten.

In den beiden folgenden Abschnitten werden, wie bereits für die Bestimmung von Krümmungsmaßen diskreter Flächen, zwei Fälle unterschieden. Im ersten Fall handelt es sich um beliebig verteilte Stützpunkte, im zweiten um Stützpunkte eines Rasters. In beiden Fällen wird angenommen, daß  $x_\alpha$  fehlerfrei und fest sind.

#### 4.1.1 2.5D-Flächen beliebig verteilter diskreter Flächenpunkte

Die Beobachtungsgleichung ist durch (4.2) gegeben. Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{X}$  ist von Punkt zu Punkt wegen der unterschiedlichen Geometrie und Anzahl der Nachbarpunkte verschieden. Durch die unterschiedliche Geometrie ist insbesondere hier eine Überprüfung auf einen Rangdefekt der Normalgleichungsmatrix erforderlich. Die Gewichte bzw. die Diagonalelemente der Gewichtsmatrix können als Funktion des Abstandes  $d^2 = \bar{x}_{\alpha,l} \bar{x}_{\alpha,l}$  gewählt werden. Das resultierende Normalgleichungssystem ist somit für jeden Punkt neu aufzustellen und zu lösen.

### 4.1.2 2.5D-Flächen diskreter Flächenpunkte eines Rasters $u^\alpha$

Durch den Bezug auf ein Raster ist die Geometrie der Nachbarpunkte, sowie deren Anzahl, z. B.  $3 \times 3$  oder  $5 \times 5$ , fest. Dies hat zur Folge, daß auch die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{X}$  und die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$  fest sind, und somit auch das Normalgleichungssystem fest ist. Es gilt

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{x}_3 = \mathbf{M} \mathbf{x}_3. \quad (4.7)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  kann vorab bestimmt werden. Ihre Zeilen sind Faltungskernen zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_{3,AB}$  vergleichbar (vgl. Haralick und Watson 1981).

## 4.2 Lokale Approximation von 3D-Flächen

Die lokale Approximation von 3D-Flächen ist eine Verallgemeinerung des im Abschnitt 4.1 erläuterten Verfahrens. Die grundlegende Gleichung zur Bestimmung der Approximation lautet hier:

$$x_i(u^\alpha) = \sum_{A+B=0}^n a_{i,AB} (u^1)^A (u^2)^B \quad (4.8)$$

(vgl. Hoschek und Lasser 1989). In den folgenden Abschnitten werden nur kurz Unterschiede, die sich aus der Verallgemeinerung ergeben, erörtert.

### 4.2.1 3D-Flächen beliebig verteilter diskreter Flächenpunkte

Ist die Fläche als diskrete Punktwolke gegeben, so sind zur Anwendung der (4.8) Flächenkoordinaten zu definieren. Für diese Flächenkoordinaten muß  $x_i = x_i(u^\alpha)$  eindeutig sein. Im Fall von Graphenflächen  $x_3 = x_3(x_\alpha)$  ist dies sichergestellt. Ein hier möglicher Lösungsweg ist folgender:

- Festlegung der Nachbarschaft  $\mathcal{N}(k, r)$
- Bestimmung einer Ebene, auf die die Punkte der Nachbarschaft eindeutig abgebildet werden können, z. B. eine Ebene senkrecht zu  $n_{i,0k}$  gemäß (2.1)
- Projektion der Punkte  $P_l \in \mathcal{N}(k, r)$  auf diese Ebene

Die so erhaltenen Ebenenkoordinaten können als Flächenkoordinaten  $u^\alpha$  dienen und (4.8) genutzt werden. Diese Vorgehensweise wird in Abschnitt 4.2.3 näher erläutert.

### 4.2.2 3D-Flächen diskreter Flächenpunkte eines Rasters $u^\alpha$

Das Approximationsverfahren ist eine direkte Verallgemeinerung der lokalen Approximation von 2.5D-Flächen diskreter Flächenpunkte eines Rasters. Die Koeffizientenmatrix ist fest. Die Gewichte können hier als Funktionen der Distanz im Raster  $u^\alpha$  oder des euklidischen Abstandes gewählt werden. Im ersten Fall ist  $\mathbf{P}$  fest, im zweiten ist die Gewichtsmatrix von Punkt zu Punkt verschieden, und somit das Normalgleichungssystem für jeden Punkt neu aufzustellen und zu berechnen. (vgl. Stokely und Wu 1992)

### 4.2.3 Lokale 2.5D-Repräsentation

In Arman und Aggarwal 1993 ist ein Verfahren zur Glättung von 3D-Flächen zitiert, welches lokal auf der Basis einer 2.5D-Fläche arbeitet. Die Grundzüge dieser lokalen 2.5D-Repräsentation sollen hier kurz dargestellt werden.

Gegeben seien diskrete Punkte einer Fläche  $\mathcal{F}$  im Rasterformat  $P_k \in \mathcal{F}$  mit  $x_{i,k}(u^\alpha)$ . Ausgehend von diesen Daten werden die ersten Ableitungen  $x_{i,k,\alpha}$  und hierauf basierend die Flächennormalenvektoren  $n_{i,k}$  bestimmt<sup>21</sup>. Diese Flächennormale definiert eine Tangentialebene  $\mathcal{T}$  an die Fläche  $\mathcal{F}$ . Werden innerhalb dieser Tangentialebene zwei orthogonale Vektoren definiert, so ist hierdurch ein lokales kartesisches Koordinatensystem  $S_l$  rotatorisch festgelegt. Hierbei soll die Flächennormale  $n_{i,k}$  parallel zur  $\overset{l}{x}_{3,-}$ -Achse sein. Mit der Festlegung, daß  $\overset{l}{x}_{i,k} = 0$ , ist dieses lokale System auch translatorisch festgelegt, so daß die Transformationen

$$x_i = x_{i,k} + e_{ij,l} \overset{l}{x}_{j,k} \quad \text{bzw.} \quad \overset{l}{x}_i = e_{ji,l}(x_j - x_{i,k}) \quad (4.9)$$

gelten, wobei  $e_{ij,l}$  die Rotationsmatrix von  $S_l$  nach  $S$  ist. Unter der Voraussetzung, daß es sich nicht um eine stark gefaltete Fläche handelt ist somit die 3D-Fläche lokal durch eine 2.5D-Fläche  $\overset{l}{x}_3(\overset{l}{x}_\alpha)$  repräsentiert.

## 4.3 Art und Grad der Polynome

Bei den in den vorherigen Abschnitten zur Flächenapproximation genutzten Polynome handelte es sich um beliebige Polynome. Nutzt man orthogonale Polynome anstatt beliebiger Polynome entstehen dadurch Vorteile, die im folgenden aufgezeigt werden sollen. Diese Vorteile betreffen auch die ggf. durchzuführende Bestimmung des Polynomgrads. Bei dieser Bestimmung handelt es sich um eine Modellidentifikation, d.h. die Art der zur Approximation verwendeten Fläche wird neben den Koeffizienten selbst mitbestimmt. Aspekte bezüglich des Polynomgrades werden anschließend diskutiert.

### 4.3.1 Orthogonale Polynome

Orthogonale Polynome sind Polynome deren Koeffizienten voneinander unabhängig sind. Ein Beispiel für orthogonale Polynome ist eine Fourier-Reihe. Die Unabhängigkeit der Koeffizienten drückt sich in der Form der Normalgleichungsmatrix aus. Im Falle orthogonaler Polynome ist die Normalgleichungsmatrix eine Diagonalmatrix. Die Bestimmung der Koeffizienten besteht daher nicht aus einer aufwendigen Inversion der Normalgleichungsmatrix, sondern es können, zumindest bei einer Rasterrepräsentation, zur Bestimmung jedes einzelnen Koeffizienten die erforderlichen Gleichungen explizit angegeben werden (vgl. Besl und Jain 1986, S.59, Stokely und Wu 1992). Weiterhin ergeben sich Vorteile bei der Bestimmung des Polynomgrades aufgrund der Orthogonalität, was im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

<sup>21</sup> ggf. Mittelung in einer Nachbarschaft  $\mathcal{N}$



### 4.3.2 Polynomgrad

Zu Beginn des Abschnittes über Flächenapproximationen wurde bereits der notwendige Grad der Polynome angesprochen, sowie auf die Tatsache hingewiesen, daß die Wahl des Grades auch das Approximationsergebnis beeinflußt, da hierdurch der Flächentyp mitbestimmt wird. Im folgenden sollen hierzu weitere allgemeine Hinweise gegeben werden.

Der Polynomgrad  $n$  und die Anzahl  $|\mathcal{N}|$  der Punkte der Nachbarschaft stehen in direktem Zusammenhang. Je größer  $n$ , desto

- größer ist die Anzahl  $|\mathcal{N}|$  der Punkte, die zur Schätzung der Koeffizienten herangezogen werden müssen.
- eher ist bei einer rauhen Fläche nach der Signifikanz der bestimmten Koeffizienten im Punkt  $P_k$  zu fragen.
- größer wird der Rechenaufwand pro Punkt.

Je größer  $|\mathcal{N}|$  gegenüber  $n$  ist, desto

- eher können Punkte miteinbezogen werden, die die Schätzung der Koeffizienten verfälschen (rauhe Fläche), jedoch nicht hätten miteinbezogen werden dürfen, da sie bereits zu einer anderen lokalen Struktur gehören.
- besser wird bei einer glatten Fläche (entsprechend der Wahl des Polynomgrads) der Einfluß des Rauschens gemindert sein.

Aus diesen Gründen ist die jeweilige Nachbarschaft in Abhängigkeit von der Rauigkeit der Fläche und der jeweiligen Anwendung zu wählen. Hierbei wird man einen Kompromiß zwischen der durch die Approximation gewünschten Glättung und der lokalen Informationserhaltung finden müssen.

Bei der Bestimmung der Koeffizienten handelt es sich um eine Ausgleichung im Gauß-Markoff-Modell, so daß die Koeffizienten für einen vorgegebenen, ausreichend hohen Polynomgrad bestimmt und auf ihre Signifikanz getestet werden können. Eine Anpassung des Polynomgrads kann dann dadurch erfolgen, daß beginnend mit den Koeffizienten des höchsten Grades ihre Signifikanz getestet wird. Wird hierbei festgestellt, daß ein Koeffizient nicht signifikant ist, wird eine erneute Bestimmung der Koeffizienten ohne den als nicht signifikant erkannten Koeffizienten durchgeführt. Dieser Ablauf wird wiederholt bis alle bestimmten Koeffizienten einer solchen Iteration signifikant sind.

Bei orthogonalen Polynomen können alle Koeffizienten auf Signifikanz getestet und ggf. gestrichen werden. Bedingt durch ihre Unabhängigkeit ist es nicht notwendig, nach dem Aussondern der als nicht signifikant erkannten Koeffizienten eine erneute Bestimmung der verbleibenden Koeffizienten durchzuführen (vgl. Koch 1987).

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Polynomgrads und somit der Art der Approximationsfläche zeigen Besl und Jain 1988 auf. Sie beginnen mit der einfachsten Hypothese, d. h. die Fläche  $\mathcal{F}$  sei lokal durch eine Ebene zu approximieren. Diese Hypothese wird auf

der Grundlage der beobachteten Daten und der geschätzten Koeffizienten der Flächenapproximation getestet. Wird sie angenommen, ist der Polynomgrad und die Flächenapproximation bestimmt. Wird sie nicht angenommen, wird der Polynomgrad um eins erhöht und die beschriebenen Arbeitsschritte wiederholt. Bei dieser Vorgehensweise ist ein maximaler Polynomgrad als ein Abbruchkriterium vorzugeben.

Newman *et al.* 1993 geben einen Algorithmus zur modellgestützten Klassifikation von Flächen 2.Ordnung an. Nach einer Segmentierung erfolgt eine Approximation der Fläche durch vorgegebene Modellflächen 2.Ordnung. Hierbei werden Kugeln, Zylinder, Kegel und Ebenen benutzt. Für jede Approximation wird ein Fehlermaß basierend auf der Summe der Abstände der Punkte von der Fläche berechnet. Dieses Fehlermaß charakterisiert die Güte der jeweiligen Approximation. Für die weiteren Bearbeitungsschritte wird die Approximation mit dem kleinsten Fehlermaß verwendet.

Neben diesen aufgezeigten Vorgehensweisen besteht jedoch auch die Möglichkeit einer direkten Schätzung des Polynomgrades (vgl. Koch 1990, S.83).

#### 4.4 Bestimmung der Ableitungen

Sind die Koeffizienten  $a_{i,AB}$  der (4.8) bekannt, so können die Ableitungen analytisch bestimmt werden. Im folgenden sind die ersten und zweiten Ableitungen für eine 2.5D-Fläche basierend auf (4.1) mit einer Approximation vom Polynomgrad  $n = 3$  angegeben:

$$\frac{\partial x_3}{\partial u^1} = a_{3.10} + 2 a_{3.20} (u^1) + a_{3.11} (u^2) + 3 a_{3.30} (u^1)^2 + 2 a_{3.21} (u^1) (u^2) + a_{3.12} (u^2)^2 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial u^2} = a_{3.01} + a_{3.11} (u^1) + 2 a_{3.02} (u^2) + a_{3.21} (u^1)^2 + 2 a_{3.12} (u^1)(u^2) + 3 a_{3.03} (u^2)^2 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{(\partial u^1)^2} = 2 a_{3.20} + 6 a_{3.30} (u^1) + 2 a_{3.21} (u^2) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{(\partial u^2)^2} = 2 a_{3.02} + 2 a_{3.12} (u^1) + 6 a_{3.03} (u^2) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 x_3}{\partial u^1 \partial u^2} = a_{3.11} + 2 a_{3.21} (u^1) + 2 a_{3.12} (u^2) \quad (4.14)$$

Die Bestimmung der Ableitungen für eine 3D-Fläche erfolgt analog.

## 5 Numerische Aspekte

Die Bestimmung differentialgeometrischer Größen basiert auf den 1. und 2. Ableitungen der kartesischen Koordinaten  $x_i$  nach den Flächenkoordinaten  $u^\alpha$ . In den vorherigen Abschnitten wurden Wege zur Bestimmung dieser Ableitungen aufgezeigt. Einige Vor- und Nachteile dieser Lösungsansätze sollen im folgenden diskutiert werden. Hierzu wird angenommen, daß die Fläche in einer Rasterrepräsentation gegeben ist<sup>22</sup>. In diesem Fall bestehen wie oben beschrieben zwei Möglichkeiten (vgl. Arman und Aggarwal 1993):

- numerische Differentiation auf der Grundlage der beobachteten Daten  $x_i$  und der durch die Rasterrepräsentation gegebenen Flächenkoordinaten  $u^\alpha$

oder

- Approximation der durch diskrete Punkte beschriebenen Fläche  $\mathcal{F}$  durch eine analytisch beschreibbare Fläche  $\mathcal{F}^*$  und analytische Bestimmung der Ableitungen auf der Grundlage dieser Flächenapproximation.

Die numerische Differentiation bietet den Vorteil, daß sie die Daten direkt berücksichtigt und daß sie mittels einfacher Ableitungsoperatoren durchgeführt werden kann (vgl. Arman und Aggarwal 1993, S.36, Besl 1990, S.186). Auf der anderen Seite ist bekannt, daß bei verrauschten Daten durch numerische Differentiation der Einfluß des Rauschens verstärkt wird.

**Beispiel 5.1** Sei  $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_n^2 \mathbf{I})$ .

- 1.Ableitung  $D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ : Mit Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt:

$$\sigma_{D_1 n}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \sigma_n^2$$

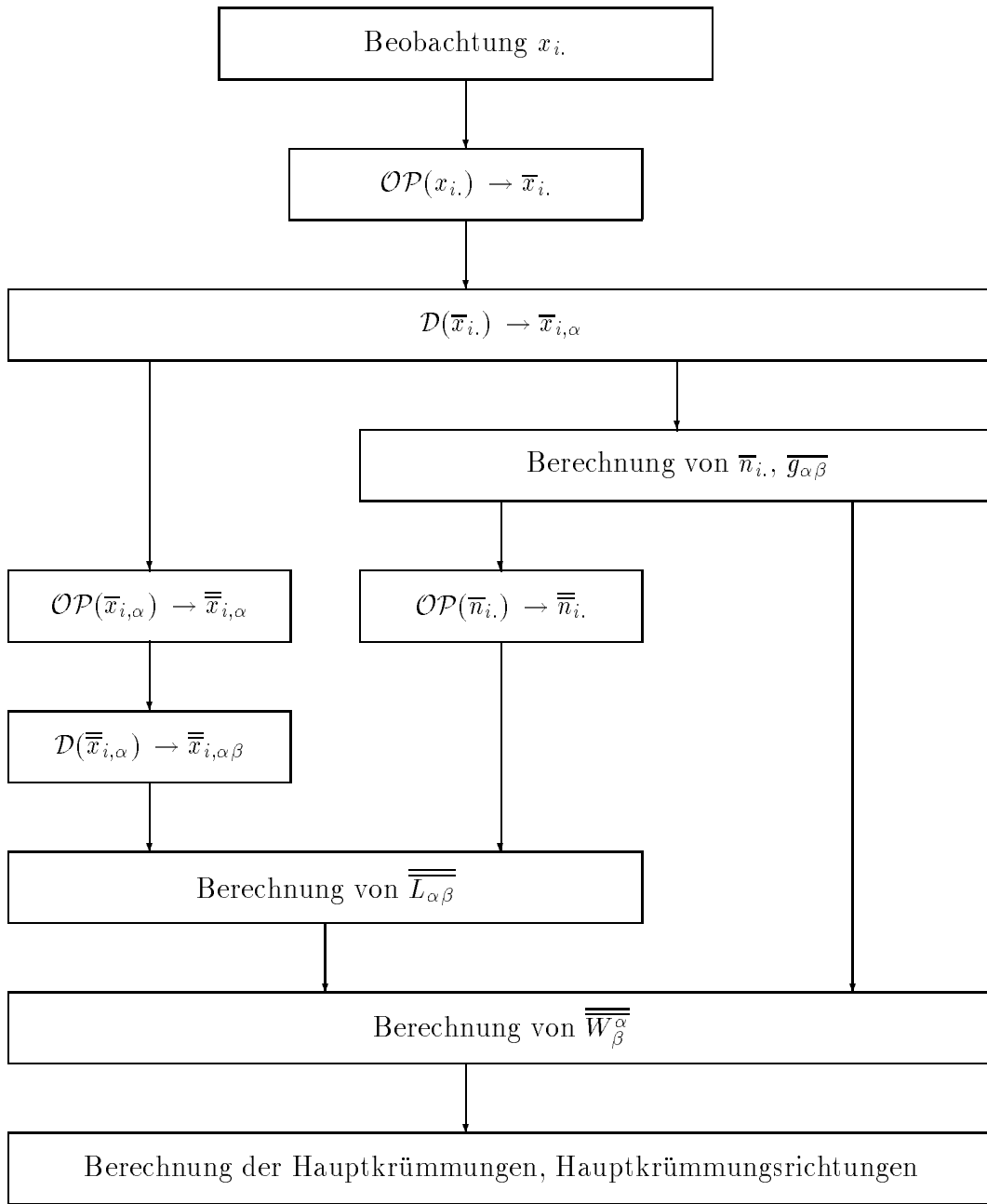
- 2.Ableitung  $D_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ : Mit Fehlerfortpflanzungsgesetz folgt:

$$\sigma_{D_2 n}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 \sigma_n^2$$

□

---

<sup>22</sup>Für durch Dreiecke repräsentierte Flächen wird es, insbesondere bei einer ungleichmäßigen Punktverteilung, sinnvoll sein, eine Approximationsfläche  $\mathcal{F}^*$  zu bestimmen und die weiteren Berechnungen auf der Basis der für diese Fläche  $\mathcal{F}^*$  definierten Flächenkoordinaten durchzuführen. Vgl. hierzu auch die Anmerkung zur Bestimmung der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen in Abschnitt 2.



$OP$       Approximation oder Glättung  
 $D$          analytische oder numerische Differentiation

**Abb. 5-1:** Prinzipielle Lösungsansätze

Weiterhin handelt es sich bei der Differentiation von durch Punkten gegebenen Flächen um ein schlecht gestelltes Problem (vgl. Torre und Poggio 1986). Aus diesen Gründen ist vor der numerischen Differentiation eine Glättung bzw. eine Regularisierung der Daten notwendig. Arman und Aggarwal 1993 zeigen einige Verfahren zur Glättung auf. Hierbei handelt es sich im wesentlichen um Verfahren, die aus der digitalen Bildverarbeitung stammen und, zumindest für Graphenflächen<sup>23</sup>, direkt anwendbar sind.

**Anmerkung 5.1** *Ein in Arman und Aggarwal 1993 zitiertes Verfahren geht nach der Transformation in ein lokales Koordinatensystem (vgl. Abschnitt 4.2.3) davon aus, daß  $x_\alpha$  fehlerfrei sind und somit lokal die aus der digitalen Bildverarbeitung bekannten Glättungsverfahren, z. B. gewichtete Mittelbildung oder Median, für  $x_{3,}$ , d. h. zur Berechnung von  $\Delta x_{3,}$ , eingesetzt werden können. Die berechneten Änderungen können dann zurücktransformiert werden, so daß*

$$x_{i,k}^{t+1} = x_{i,k}^t + e_{ij,l} \Delta x_{j,k}^t \quad \text{mit} \quad \Delta x_{\alpha,k}^t = 0 \quad (5.1)$$

das Ergebnis darstellt. •

Die analytische Bestimmung der Ableitungen von  $\mathcal{F}^*$  erfordert eine Bestimmung der Polynomkoeffizienten, die Ableitungen können dann aber mittels dieser Koeffizienten leicht angegeben werden (vgl. Abschnitt 4.4). Die Approximation schließt gleichzeitig eine gewisse Glättung der Daten mit ein. Der wesentliche Nachteil einer Approximation besteht jedoch in der Tatsache, daß für alle Punkte ein identischer Flächenansatz, z. B. quadratisch, vorab gewählt wird. Eine optimale Anpassung des Polynomgrads erfolgt in der Regel nicht, da hiermit wiederum ein erhöhter Rechenaufwand verbunden wäre. Weiterhin werden zur Bestimmung der Flächenapproximation i. a. alle Punkte einer Nachbarschaft einbezogen. Diskontinuitäten werden daher nicht berücksichtigt.

Beide Lösungsansätze haben gemeinsam, daß eine Entscheidung über die Größe der Nachbarschaft getroffen werden muß, auf deren Basis die numerische Differentiation oder die Approximation durchgeführt wird. Die möglichen Lösungsansätze sind in Abb. 5-1 zusammengefaßt.

Flynn und Jain 1989 vergleichen Verfahren zur Bestimmung von Krümmungen einer 2.5D-Fläche. Zu diesen Verfahren gehören Verfahren mit analytischen Ansätzen basierend auf Flächenapproximationen (Polynome, orthogonale Polynome, Splines) und numerische Ansätze (Änderung der Flächennormale, Richtungsableitungen in einem orthogonalen Raster). Sie berichten, daß alle Verfahren zu vergleichbaren Ergebnissen führen. Weiterhin zeigen sie die Empfindlichkeit der Verfahren gegenüber der Abtastungsdichte und die extreme Empfindlichkeit gegenüber Quantisierungsrauschen bei 8-bit-Daten. Um die durch das Quantisierungsrauschen hervorgerufenen Effekte zu vermindern, werden die Daten zuvor stark geglättet (10 Iterationen mit  $7 \times 7$  Binomialfilter), was einen erheblichen Informationsverlust beinhaltet.

---

<sup>23</sup>In der dem Autor bisher bekannten Literatur werden die differentialgeometrischen Grundlagen auf denen eine Auswertung von Entfernungsbildern basiert immer allgemein dargestellt. Realisierungen werden dann aber sehr häufig auf Graphenflächen beschränkt. Diese Repräsentationsform entspricht der Repräsentationsform digitaler Bilder im Sensorkoordinatensystem.

## 6 Segmentierung von Flächen

Flächen, wie sie durch die Messung mittels Entfernungsmessern erhalten werden, sind eine einfache geometrische Beschreibung einer Szene. Eine solche Beschreibung beinhaltet neben der rein geometrischen Information keine weitere explizite Information über die in der Szene befindlichen Objekte. Dies betrifft die Anzahl der Objekte, die Art der Objekte oder aber auch Beziehungen zwischen den Objekten. Die Aufgabe besteht nun darin, aus der einfachen geometrischen Beschreibung eine Beschreibung abzuleiten, die diese Information enthält. Einen ersten Schritt in diese Richtung bildet die Segmentierung der die ganze Szene umfassenden Fläche in einzelne Flächensegmente als Eingangsbeschreibung für weitere Objekterkennungsprozesse<sup>24</sup>. Die erhaltenen Flächensegmente sollen signifikante Bereiche der Szene darstellen, wobei die Definition der Signifikanz ebenso wie die für die Segmentierung zugrundezulegenden Kriterien anwendungsbezogen ist.

In Fisher 1989, S.43 sind verschiedene Anforderungen an eine Segmentierung angegeben. Eine Segmentierung soll

- zusammenhängende, homogene Bereiche zum Ergebnis haben,
- invariant gegenüber einer Änderung des Standpunktes und (kleinen) Änderungen der Flächenform, sowie
- eindeutig und vollständig

sein. Hierbei richtet sich die Homogenität nach den gewählten Segmentierungskriterien. Die Anforderung nach Invarianz steht in enger Beziehung zur Signifikanz der gefundenen Flächenbereiche und ist wie diese abhängig von der jeweiligen Anwendung.

Im folgenden sollen Segmentierungskriterien basierend auf Flächeneigenschaften aufgezeigt werden. Bei diesen Segmentierungskriterien kann es sich einmal direkt um eine Flächeneigenschaft, z.B. ein Krümmungsmaß, oder um ein hieraus abgeleitetes Homogenitätskriterium handeln. Krümmungsmaße als Segmentierungskriterium werden in Abschnitt 6.1 und aus Krümmungsmaßen oder anderen Flächeneigenschaften abgeleitete Homogenitätskriterien in Abschnitt 6.2 aufgezeigt. Für die Homogenitätsmaße wird davon ausgegangen, daß die zu betrachtende Fläche  $C^2$ -stetig ist. Abweichungen hiervon haben unterschiedliche Ursachen und Bedeutungen (vgl. Fisher 1989 und Abb. 6-1).

Einen Überblick über Segmentierungsverfahren für *range images* geben Fisher 1989 und Arman und Aggarwal 1993. Eine Reihe dieser Verfahren benutzt *region growing*, andere verfolgen einen Pyramiden- bzw. *scale-space*-Ansatz. Hierauf soll im folgenden jedoch nicht eingegangen werden.

### 6.1 Krümmungsmaße zur Segmentierung durch Klassifikation

Bei Segmentierungsverfahren basierend auf Krümmungsmaßen handelt es sich in der Regel um Klassifikationsverfahren. Hierbei wird für jeden einzelnen Punkt das für die Klassifizierung

---

<sup>24</sup>Newman *et al.* 1993 geben einen Algorithmus zur modellgestützten Klassifikation von Flächen 2.Ordnung an, der von einer vorliegen Segmentierung ausgeht. Eine andere Anwendung kann die Durchführung von bereichsweisen Flächenapproximationen basierend auf einer Flächensegmentierung zur Verbesserung von vorher vielleicht nur lokal bestimmten Flächenapproximationen sein.

zu nutzende Krümmungsmaß berechnet und die Klassifizierung durchgeführt. Anschließend werden benachbarte Punkte mit gleicher Klassifikation zu Segmenten zusammengefaßt <sup>25</sup>.

Auf der Grundlage der in Abschnitt 1 dargestellten Krümmungsmaße ergeben sich verschiedene Klassifikationsmöglichkeiten, z. B.

- Klassifikation basierend auf den Hauptkrümmungen: Diese Klassifikation führt auf eine symmetrische Matrix und somit 6 verschiedene Klassen (Abb. 6-2).
- Klassifikation basierend auf der Gauß'schen und mittleren Krümmung: Diese Klassifikation führt auf Abb. 6-3. Bei Fisher 1989, S.96 sind die Hauptkrümmungen mit umgekehrtem Vorzeichen definiert (Problematik vgl. Heitz 1988, S.104). Die Definition der Vorzeichens folgt hier aus (1.44). Bei Besl 1990, S.173 wird eine zusätzliche Unterscheidung in Abhängigkeit von der Normalenrichtung bei den einzelnen Flächen mit den in Klammern angegebenen Bezeichnungen durchgeführt (vgl. auch Besl und Jain 1986). Eine differenzierte Klassifikation mit den Klassenbezeichnungen aus Abb. 6-2 ist in Abb. 6-4 gegeben.

Weitere Klassifikationsmöglichkeiten sind in Fisher 1989 und Haralick *et al.* 1983, hier speziell für Graphenflächen (2.5D), angegeben <sup>26</sup>. Einen Überblick über Arbeiten zur Klassifikation von Flächen geben auch Besl und Jain 1986, sowie Arman und Aggarwal 1993.

Für die Klassifikationen werden im wesentlichen nur die Vorzeichen der Krümmungsmaße genutzt. Dies hat den Vorteil, daß die Klassifikation nicht von der Stärke der Krümmung abhängt und somit kleine Änderungen der Flächenform keine oder nur eine geringe Änderung der Klassifikation zur Folge haben.

---

<sup>25</sup>Dies wird i.a. dazu führen, daß bedingt durch Meßrauschen oder andere Einflüsse, nur kleine homogene Bereiche gefunden werden. In Li 1990 ist ein Verfahren angegeben, daß, analog zu einigen Verfahren zur Flächenrekonstruktion, eine Rekonstruktion der Klassifizierungen mittels Minimierung einer Energiefunktion vornimmt und hierdurch weitgehend zusammenhängende Segmente erhält.

<sup>26</sup>Haralick und Shapiro 1992 weisen darauf hin, daß bei der dem Verfahren zugrundeliegenden Flächenapproximation, den hierauf basierenden Ableitungen und der Klassifikation aufgrund der Flächeneigenschaften der Approximationsfläche  $\mathcal{F}^*$  im Punkt (0,0) Probleme entstehen. So wird z. B. ein Pixel nicht als *peak* klassifiziert, obwohl es sich bei den beobachteten Werten lokal um ein Maximum handelt, wenn nicht auch das Maximum von  $\mathcal{F}^*$  an der Stelle (0,0) ist. Es reicht daher nicht aus, die Eigenschaften von  $\mathcal{F}^*$  im Punkt (0,0) zu bestimmen. Eine diese Tatsache berücksichtigende Vorgehensweise ist in der angegebenen Literaturstelle zu finden.

| Unstetigkeit        |                                                                     | Bedeutung                                         |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| nicht $C^0$ -stetig | Unstetigkeit der Fläche                                             | Verdeckungsgrenze                                 |
| nicht $C^1$ -stetig | Unstetigkeit der Flächennormalen                                    | Flächenorientierungsgrenze                        |
| nicht $C^2$ -stetig | Unstetigkeit des Betrages und/oder der Richtung der Hauptkrümmungen | Betrags- und Richtungsgrenzen der Hauptkrümmungen |

**Abb. 6-1:** Unstetigkeiten und ihre Bedeutung

|              | $k_{n1} < 0$         | $k_{n1} = 0$      | $k_{n1} > 0$         |
|--------------|----------------------|-------------------|----------------------|
| $k_{n2} < 0$ | konvexes Ellipsoid   | konvexer Zylinder | hyperbolische Fläche |
| $k_{n2} = 0$ | konvexer Zylinder    | Ebene             | konkaver Zylinder    |
| $k_{n2} > 0$ | hyperbolische Fläche | konkaver Zylinder | konkaves Ellipsoid   |

**Abb. 6-2:** Klassifikation nach Hauptkrümmungen

|         | $K > 0$                      | $K = 0$           | $K < 0$                                 |
|---------|------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|
| $H < 0$ | elliptische Fläche<br>(peak) | Torse<br>(ridge)  | hyperbolische Fläche<br>(saddle ridge)  |
| $H = 0$ | †                            | Ebene<br>(flat)   | hyperbolische Fläche<br>(minimal)       |
| $H > 0$ | elliptische Fläche<br>(pit)  | Torse<br>(valley) | hyperbolische Fläche<br>(saddle valley) |

† : nicht möglich

**Abb. 6-3:** Klassifikation nach Gauß'scher und mittlerer Krümmung (I)



|                                                 |  | $K < 0$                       |                                 |
|-------------------------------------------------|--|-------------------------------|---------------------------------|
|                                                 |  | $k_{n1} > 0; k_{n2} < 0$      | $k_{n1} < 0; k_{n2} > 0$        |
| $H < 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} < 0$                            |  | †                             | †                               |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} < 0$ ; andere $\geq 0$ |  | hyperbolische Fläche          | hyperbolische Fläche            |
| $H = 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1} > 0; k_{n2} < 0$                        |  | hyperbolische Fläche          | †                               |
| $k_{n1} < 0; k_{n2} > 0$                        |  | †                             | hyperbolische Fläche            |
| $k_{n1} = k_{n2} = 0$                           |  | †                             | †                               |
| $H > 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} > 0$                            |  | †                             | †                               |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} > 0$ ; andere $\leq 0$ |  | hyperbolische Fläche          | hyperbolische Fläche            |
|                                                 |  | $K = 0$                       |                                 |
|                                                 |  | $k_{n1} = 0; k_{n2}$ beliebig | $k_{n1}$ beliebig; $k_{n2} = 0$ |
| $H < 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} < 0$                            |  | †                             | †                               |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} < 0$ ; andere $\geq 0$ |  | konvexer Zylinder             | konkaver Zylinder               |
| $H = 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1} > 0; k_{n2} < 0$                        |  | †                             | †                               |
| $k_{n1} < 0; k_{n2} > 0$                        |  | †                             | †                               |
| $k_{n1} = k_{n2} = 0$                           |  | Ebene                         | Ebene                           |
| $H > 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} > 0$                            |  | †                             | †                               |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} > 0$ ; andere $\leq 0$ |  | konkaver Zylinder             | konvexer Zylinder               |
|                                                 |  | $K > 0$                       |                                 |
|                                                 |  | $k_{n1}; k_{n2} > 0$          | $k_{n1}; k_{n2} < 0$            |
| $H < 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} < 0$                            |  | †                             | konvexes Ellipsoid              |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} < 0$ ; andere $\geq 0$ |  | †                             | †                               |
| $H = 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1} > 0; k_{n2} < 0$                        |  | †                             | †                               |
| $k_{n1} < 0; k_{n2} > 0$                        |  | †                             | †                               |
| $k_{n1} = k_{n2} = 0$                           |  | †                             | †                               |
| $H > 0$                                         |  |                               |                                 |
| $k_{n1}; k_{n2} > 0$                            |  | konkaves Ellipsoid            | †                               |
| v.B. max. $k_{n(\gamma)} > 0$ ; andere $\leq 0$ |  | †                             | †                               |

† : nicht möglich      v.B. : vom Betrag

**Abb. 6-4:** Klassifikation nach Gauß'scher und mittlerer Krümmung (II)

## 6.2 Homogenitätskriterien zur Segmentierung

Für die im folgenden kurz diskutierten Homogenitätskriterien zur Segmentierung werden Bereiche  $\mathcal{F}_i$  einer Fläche  $\mathcal{F}$  betrachtet. Die einzelnen Bereiche  $\mathcal{F}_i$  seien  $C^2$ -stetig.

Das erste zu betrachtende Kriterium basiert auf den Hauptkrümmungen  $k_{n(\gamma)}$ ,  $\gamma = 1, 2$ . Hierzu wird die Differenz der Hauptkrümmungen in benachbarten Punkten  $P_k$  und  $P_l$  bestimmt.

$$\Delta k_{n(\gamma).l} = k_{n(\gamma).l} - k_{n(\gamma).k} \quad (6.1)$$

Geht man davon aus, daß

$$E(\Delta k_{n(\gamma).l}) = 0 \quad (6.2)$$

ist, können die Varianzen der Hauptkrümmungen

$$\sigma_{\Delta k_{n(\gamma).l}}^2 = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_m \in \mathcal{N}} \Delta k_{n(\gamma).m}^2 \quad (6.3)$$

berechnet werden. Dieses Maß ist jedoch nur beschränkt für eine Segmentierung geeignet. Treffen z. B. zwei Ebenenstücke aufeinander, so sind die Hauptkrümmungen in beiden Bereichen Null. Treffen ein Ebenenstück und ein Zylinder mit Radius  $R$  aufeinander, so ist eine Hauptkrümmung gleich  $\frac{1}{R}$ . Die Signifikanz der berechneten Varianz  $\sigma_{\Delta k_{n1}}$  hängt somit direkt vom Radius  $R$  ab.

Betrachtet man die Hauptkrümmungsrichtungen  $t_{(\gamma)}^\alpha$ ,  $\gamma = 1, 2$ , so ist darauf zu achten, daß die Metrik in benachbarten Punkten i. a. unterschiedlich ist. Werden die 3D-Hauptkrümmungsrichtungen  $k_{i.(\gamma)}$ ,  $\gamma = 1, 2$  betrachtet, so ist davon auszugehen, daß sie auch für homogene Flächenbereiche einer beliebigen Fläche i. a. für benachbarte Punkte nicht parallel sind. Ausnahmen bilden Flächen wie z. B. Zylinder. Bei einer Torse, die als ein homogener Bereich anzusehen ist, sind die Hauptkrümmungsrichtungen in verschiedenen Flächenpunkte nicht mehr parallel.

Betrachtet man die Flächennormalen  $n_i$  benachbarter Punkte und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, d. h.

$$\cos \nu_l = n_{i.l} n_{i.k} \quad (6.4)$$

so ist bei konstanter Normalenrichtung, d. h. Betrachtung einer Ebene,  $\cos \nu_l = 1$ . In einer Nachbarschaft kann das Maß

$$h_n = \frac{1}{|\mathcal{N}|} \sum_{P_m \in \mathcal{N}} \cos \nu_l \quad (6.5)$$

berechnet werden. Liegen die Punkte der Nachbarschaft in einer Ebene, so ist die Summe gleich 1. Die Abweichung von 1 ist bei zwei aufeinandertreffenden Ebenen abhängig vom Schnittwinkel. Treffen eine Ebene und ein Zylinder zusammen, so ist  $h_n$  abhängig vom Radius  $R$ .

Bei allen hier angegebenen Größen stellt sich die Frage nach der Signifikanz und der Bedeutung der Abweichung von der Sollgröße bei einem vorgegebenen Modell. Aus diesem Grund ist für eine Segmentierung einer Fläche a priori Wissen und eine Auswahl des Kriteriums zur Klassifikation und/oder zur Segmentierung notwendig.

## A Tensorrechnung

An dieser Stelle sind einige Definition und Formeln für Vektoren in Tensorschreibweise dargestellt. Weitere Definitionen können z. B. Klingbeil 1966, Heitz 1980 oder Heitz und Stöcker-Meier 1990 entnommen werden.

**Definition A.1 (Tensor 1. Stufe)** Transformiert sich die einfach indizierte Größe  $t^i$  und  $t_i$  nach den Gesetzen

$$\begin{aligned} \bar{t}^i &= \bar{a}_k^i t^k, & t^i &= \underline{a}_k^i \bar{t}^k \\ \bar{t}_i &= \bar{a}_i^k t_k, & t_i &= \underline{a}_i^k \bar{t}_k \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

so liegt ein Tensor 1. Stufe vor, wobei die  $t^i$  seine kontravarianten und  $t_i$  seine kovarianten Komponenten sind.

Analog zu Tensoren 1. Stufe sind Tensoren 2. Stufe durch folgende Transformationsregeln definiert:

**Definition A.2 (Tensor 2. Stufe)** Transformiert sich zweifach indizierte Größen nach den Gesetzen

$$\bar{t}^{ij} = \bar{a}_k^i \bar{a}_l^j t^{kl}, \quad t^{ij} = \underline{a}_k^i \underline{a}_l^j \bar{t}^{kl} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{t}_j^i = \bar{a}_k^i \bar{a}_j^l t_l^k, \quad t_j^i = \underline{a}_k^i \underline{a}_j^l \bar{t}_l^k \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{t}_{ij} = \bar{a}_i^k \bar{a}_j^l t_{kl}, \quad t_{ij} = \underline{a}_i^k \underline{a}_j^l \bar{t}_{kl} \quad (\text{A.4})$$

so liegt ein Tensor 2. Stufe vor.

Gelten für eine doppelt indizierte Größe  $t^{ij}$  die Transformationsregeln (A.2), liegt ein Tensor 2. Stufe vor.  $t^{ij}$  sind seine kontravarianten Komponenten. (A.3) sind die Transformationsregeln eines Tensors 2. Stufe mit gemischten Komponenten. Gelten für eine doppelt indizierte Größe  $t_{ij}$  die Transformationsregeln (A.4), liegt ein Tensor 2. Stufe vor. Hierbei sind  $t^{ij}$  seine kovarianten Komponenten.

**Definition A.3 ( $\delta$ -Tensor)** Der  $\delta$ - oder Kroneckertensor ist definiert durch

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

**Definition A.4 ( $\varepsilon$ -Tensor)** Der  $\varepsilon$ -Tensor ist ein schiefssymmetrischer Tensor, dessen Komponenten bei Bewegungen im Raum unverändert bleiben. Seine Komponenten folgen aus:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= 0 && \text{für mindestens zwei gleiche Indizes} \\ \varepsilon_{ijk} &= 1 && \text{für } ijk \in \{123, 231, 312\} \\ \varepsilon_{ijk} &= -1 && \text{für } ijk \in \{132, 321, 213\} \end{aligned}$$

---

**Definition A.5 (Allgemeines Produkt zweier Vektoren)** *Das allgemeine Vektorprodukt ist definiert durch*

$$a_i \cdot b_j = c_{ij}. \quad (\text{A.6})$$

Es ist ein Tensor 2. Stufe.

**Definition A.6 (Skalarprodukt)** *Das Skalarprodukt zweier Vektoren folgt aus der Überschiebung des allgemeinen Vektorprodukts aus (A.6) mit dem  $\delta$ -Tensor*

$$\delta_{ij} \cdot a_i \cdot b_j = a_i \cdot b_i = c \quad (\text{A.7})$$

**Definition A.7 (Vektorprodukt)** *Das Vektorprodukt ist die Überschiebung des allgemeinen Vektorprodukts mit dem  $\varepsilon$ -Tensor*

$$\varepsilon_{ijk} \cdot a_j \cdot b_k = c_i. \quad (\text{A.8})$$

*Der Vektor  $c_i$  steht Senkrecht auf den beiden anderen und die Vektoren  $a_i$ ,  $b_i$  und  $c_i$  bilden ein Rechtssystem.*

**Definition A.8 (Spatprodukt)** *Das Spatprodukt ist die Überschiebung von drei Vektoren mit dem  $\varepsilon$ -Tensor*

$$\varepsilon_{ijk} \cdot a_i \cdot b_j \cdot c_k = d \quad (\text{A.9})$$

## B Notation

|                                           |                                                                |
|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| $\beta$                                   | : Parametervektor (GMM)                                        |
| $\Gamma$                                  | : Christoffelsymbol                                            |
| $\Delta_{ij}$                             | : kartesischer Maßtensor                                       |
| $\delta_{\alpha\beta}$                    | : Kronecker-Tensor                                             |
| $\epsilon$                                | : Exzeß                                                        |
| $\varepsilon_{ijk}$                       | : Epsilon-Tensor                                               |
| $\mathbf{A}$                              | : Eigenwertmatrix                                              |
| $\lambda$                                 | : Eigenwert                                                    |
| $\partial$                                | : Gradient                                                     |
| $\partial_\alpha, \partial_{\alpha\beta}$ | : Ableitungsoperatoren                                         |
| $\Omega$                                  | : Quadratsumme der Residuen (GMM)                              |
| $dF, ds$                                  | : Flächen-, Bogenelement                                       |
| $d_i$                                     | : Differenzvektor zwischen zwei Punkten                        |
| $\mathbf{D}$                              | : Kovarianzmatrix (GMM)                                        |
| $E, F, G$                                 | : Komponenten des 1.Fundamentaltensors in klassischer Notation |
| $\mathbf{e}$                              | : Residuenvektor (GMM)                                         |
| $\overset{a}{e}_{i,j,k}b$                 | : Rotationsmatrix von System $S_a$ nach $S_b$                  |
| $g$                                       | : Determinante des 1.Fundamentaltensors                        |
| $g_{\alpha\beta}$                         | : 1.Fundamentaltensor                                          |
| $H$                                       | : mittlere Krümmung                                            |
| $H_{\alpha\beta}$                         | : Hesse-Matrix                                                 |
| $I, II, III$                              | : erste, zweite und dritte Fundamentalform                     |
| $K$                                       | : Gauß'sche Krümmung                                           |
| $k_{abs}$                                 | : absolute Krümmung                                            |
| $k_g$                                     | : geodätische Krümmung                                         |
| $k_n$                                     | : Normalkrümmung                                               |
| $k_{n1}, k_{n2}$                          | : Hauptkrümmungen                                              |
| $k_{i.(\gamma)}, t_{(\gamma)}$            | : Hauptkrümmungsrichtungen                                     |
| $L, M, N$                                 | : Komponenten des 2.Fundamentaltensors in klassischer Notation |
| $l$                                       | : Determinante des 2.Fundamentaltensors                        |
| $L_{\alpha\beta}$                         | : 2.Fundamentaltensor                                          |
| $M_{i,j,k}$                               | : Momentenmatrix eines Punktes $P_k$                           |
| $\mathcal{N}$                             | : Nachbarschaft                                                |
| $ \mathcal{N} $                           | : Anzahl der Punkte einer Nachbarschaft ohne Punkt $P_k$       |
| $n_i$                                     | : Flächennormalenvektor                                        |
| $\mathbf{P}$                              | : Gewichtsmatrix                                               |
| $u^\alpha$                                | : Flächenkoordinaten                                           |
| $W_\beta^\alpha$                          | : Weingarten Abbildung                                         |
| $W_Q W_\beta^\alpha$                      | : quadrierte Weingarten Abbildung                              |
| $\mathbf{X}$                              | : Koeffizientenmatrix (GMM)                                    |
| $x_i$                                     | : kartesische 3D-Koordinaten                                   |
| $\overset{l}{x}_{i..}$                    | : kartesische 3D-Koordinaten im System $l$                     |
| $x_{i,\alpha}$                            | : Ableitungen nach den Flächenkoordinaten                      |
| $x'_{i.}$                                 | : Ableitung nach der Bogenlänge                                |
| $\mathbf{y}$                              | : Beobachtungsvektor (GMM)                                     |

## Literatur

- Arman, F.; Aggarwal, J. K. (1993): Model-Based Object Recognition in Dense-Range Images – A Review. *ACM Computing Surveys*, 25(1), 1993.
- Besl, P. J.; Jain, R. C. (1986): Invariant Surface Characteristics for 3D Object Recognition in Range Images. *CVGIP*, 33(1):33 – 80, 1986.
- Besl, P. J.; Jain, R. C. (1988): Segmentation Through Variable-Order Surface Fitting. *IEEE T-PAMI*, 10(2):167–192, 1988.
- Besl, P. J. (1990): *Analysis and Interpretation of Range Images*, Kapitel : ”Geometric Signal Processing”. Springer, 1990.
- Campbell, H. G. (1980): *Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall, 2. Ausgabe, 1980.
- Chen, Y.; Medioni, G. (1994): Surface Description of Complex Objects from Multiple Range Images. In: *Proceedings Computer Vision and Pattern Recognition*, Seiten 153–158, 1994.
- Delingette, H. (1994): Intrinsic Stabilizers of Planar Curves. In: Eklundh, J.-O. (Hrsg.), *Computer Vision - ECCV 94, Vol. II, Proceedings*, Seiten 427–436, 1994.
- Delingette, H. (1994): Simplex Meshes: A General Representation for 3D Shape Reconstruction. *Rapports de Recherche 2214, INRIA*, 1994.
- doCarmo, M. P. (1976): *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- Farin, G. (1988): *Curves and Surfaces for Computer Aided Design*. Academic Press, 1988.
- Fisher, R. B. (1989): *From Surfaces to Objects*. Wiley & Sons, 1989.
- Flynn, P. J.; Jain, A. K. (1989): On Reliable Curvature Estimation. In: *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, San Diego*, Seiten 110–116, 1989.
- Förstner, W.; Braun, C. (1992): Direkte Schätzung von Richtungen und Rotationen. Technischer Bericht, Institut für Photogrammetrie, Bonn, 1992.
- Fua, P.; Sander, P. (1992): Reconstructing Surfaces from Unstructured 3D Points. In: *Proceedings of Image Understanding Workshop*, Seiten 615–625, 1992.
- Haralick, R. M.; Watson, L. T.; Laffey, T. J. (1983): The Topographic Primal Scetch. *International Journal of Robotics Research*, 2(1):50–72, 1983.
- Haralick, R. M.; Shapiro, L. G. (1992): *Robot and Computer Vision*. Addison-Wesley, 1992.
- Haralick, R. M.; Watson, L. T. (1981): A Facet Model for Image Data. *CGIP*, 15(2):113–129, 1981.
- Heitz, S.; Stöcker-Meier, E. (1990): *Grundlagen der Physikalischen Geodäsie*. Dümmler, Bonn, 1990.
- Heitz, S. (1980): *Mechanik fester Körper*, Band 1. Dümmler, Bonn, 1980.
- Heitz, S. (1988): *Coordinates in Geodesy*. Springer, 1988.
- Hoffman, R.; Jain, R. C. (1987): Segmentation and Classification of Range Images. *IEEE T-PAMI*, 9(5):608–620, 1987.
- Hoschek, J.; Lasser, D. (1989): *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, 1989.
- Jähne, B. (1989): *Digitale Bildverarbeitung*. Springer, 1989.
- Klingbeil, E. (1966): *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut, Mannheim/Zürich/Wien, 1966.
- Koch, K. R. (1987): *Parameterschätzung und Hypothesentests*. Dümmler, Bonn, 2. Ausgabe, 1987.
- Koch, K. R. (1990): *Bayesian Inference with Geodetic Applications*. Lecture Notes in Earth Sciences. Springer, 1990.
- Krishnapuram, R.; Casasent, D. (1989): Determination of Three-Dimensional Object Location and Orientation from Range Images. *IEEE T-PAMI*, 11(11):1158–1167, 1989.
- Li, S. Z. (1990): Invariant Surface Segmentation Through Energy Minimization with Discontinuities. *IJCV*, 5(2):161–194, 1990.
- Lipschütz, M. M. (1980): *Differentialgeometrie*. McGraw-Hill, 1980.
- Newman, T.; Flynn, P. J.; Jain, A.K. (1993): Model-Based Classification of Quadric Surfaces. *CVGIP-IU*, 58(2):235–249, 1993.
- Reiß, P. (1985): *Aufbau digitaler Höhenmodelle auf der Grundlage einfacher finiter Elemente*, Band 315 der Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission, München, 1985.
- Stevenson, R. L.; Delp, E. D. (1992): Viewpoint Invariant Recovery of Visual Surfaces from Sparse Data. *IEEE T-PAMI*, 14(9):897–909, 1992.

- Stokely, E. M.; Wu, S. Y. (1992): Surface Parameterization and Curvature Measurement of Arbitrary 3D-Objects: Five Practical Methods. *IEEE T-PAMI*, 14(8):833–840, 1992.
- Terzopoulos, D. (1986): Regularization of Inverse Visual Problems Involving Discontinuities. *IEEE T-PAMI*, 8(4):413–424, 1986.
- Torre, V.; Poggio, T. A. (1986): On Edge Detection. *IEEE T-PAMI*, 8(2):147–163, 1986.
- Wolf, H. (1968): *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Dümmler, Bonn, 1968.

# Index

- $\delta$ -Tensor, 48
- $\varepsilon$ -Tensor, 48
- Ableitungsgleichungen, 9
  - nach Gauß, 9
  - nach Weingarten, 9
- begleitendes Dreibein, 6, 7
- Christoffelsymbol
  - erster Art, 9
  - zweiter Art, 9
- Eigenwertzerlegung, 18
- Ellipsoid
  - konkav, 44
  - konvex, 44
- Euler
  - Satz von, 12
- Exzeß, 13, 29
- Fehlerfortpflanzungsgesetz, 40
- Fläche
  - inhalt, 7
  - nsingularität, 6
  - elliptische, 44
  - Graphen-, 13, 34
  - hyperbolische, 44
  - konvexe, 13
  - Minimal-, 13
  - reguläre, 6
- Flächenapproximation, 34
  - globale, 34
  - lokale, 34
  - mit Polynomen, 35
  - von 3D-Flächen, 36
  - von Graphenflächen, 35
- Flächenkoordinaten
  - allg. Darstellung, 6
  - isotherme, 7, 14
  - orthogonale, 7
- Flächennormalenvektor, 6, 18, 32
  - Mittelung, 26
  - Schätzung, 25
- Fundamentalform
  - dritte, 13
  - erste, 7
  - zweite, 10
- Fundamentaltensor
  - erster, 6, 13, 18
    - kartesischer, 8
  - zweiter, 9, 13, 19
- Gauß-Markoff-Modell, 8, 38
- geodätische Linie, 11
- geodätisches Dreieck, 13, 29
- Hesse-Matrix, 19, 20
  - quadrierte, 17
- Krümmung
  - slinien, 10, 12, 14
  - absolute, 22
  - einer Flächenkurve, 10
  - einer Isolinie, 21
  - einer Kurve  $\in \mathbb{R}^2$ , 24
  - Gauß'sche, 12, 19
  - geodätische, 10
  - Haupt-, 11, 15, 20, 28, 33
    - Richtung der, 16, 20, 28
  - mittlere, 12, 19
  - Normal-, 10, 27, 32
- Kroneckertensor, 48
- Meusnier
  - Satz von, 11
- Minimalpunkt, 22
- Nabelpunkt, 12, 15, 22
- Nachbarschaft
  - Achter-, 32
  - geometrische, 30
  - Vierer-, 32
- Normalschnitt, 27
- Polynom
  - orthogonales, 37
- Pythagoras
  - Satz von, 8
- quadratische Variation, 20, 23
- regularisierung, 20
- Singulärwertzerlegung, 18
- Skalarprodukt, 49
- Spatprodukt, 49
- Tangentenvektor, 6, 9
- Tensor
  - 1. Stufe, 48
  - 2. Stufe, 48
- Topologie, 32
- Torse, 13, 44
- Vektorprodukt, 49



Weingarten Abbildung, 13, 19

Approximation 2.5D, 20

Determinante, 14

Eigenvektoren, 15

Eigenwerte, 11, 14

quadrierte, 17

Spur, 14

Zylinder

generalisierter, 32

konkav, 44

konvex, 44