## Photogrammetry & Robotics Lab, Bonn

**3D Coordinate Systems** (Bsc Geodesy & Geoinformation)

# 0. Introduction

Wolfgang Förstner

The slides have been created by Wolfgang Förstner.

#### **Topics**

- Spatial Motions and Similarities
- Representation and Estimation
- Uncertainty Analysis

#### Example

- Mobile Mapping System with Several Sensors
- Represent and Estimate
  - Mutual Relations of Sensors
  - Motions of Vehicles
- Describe Uncertainty of Relations

# Applications (1/3)

- Surveying
  - Integration of measurements from different viewpoints



# **Applications (1/3)**

- Surveying
  - Integration of measurements from different viewpoints
  - Evaluation of deformations
  - Observation from moving platforms
  - Observation of moving objects





# Applications (2/3)

- Photogrammetry/Computer Vision
  - Modelling systems of cameras or LiDAR
  - Object tracking from one of more came
    → Track human poses
- Theoretical Geodesy
  - Integration of measurements of satellite sometimes only rotations
  - Coordinate transformations between groborne sensors (e.g. GPS)



# Applications (2/3)

- Photogrammetry/Computer Vision
  - Modelling systems of cameras or LiD.
  - Object tracking from one of more can
    → Track human poses
- Theoretical Geodesy
  - Integration of measurements of satellites sometimes only rotations
  - Coordinate transformations between ground and space borne sensors (→ Lunar Reconnaissance Orbiter)

Image: NASA

8

12

#### **Focus of lectures**

- Rotations
- Motions
- Similarities

Generalizations to

perspective mappings or mappings on the sphere

 $\rightarrow$  Specialized lectures

(photogrammetry, satellite geodesy)

### **Questions to be answered**

- How to represent spatial motions and similarities?
- How many parameters are necessary?
- How to concatenate motions and similarities?
- How to derive transformations from observations?
- How to handle outliers?
- How to represent uncertain motions?
- How to determine the uncertainty of motions?

### Tool boxes to be used

Projective geometry:

easy and compact *representation* of *concatenation and inversion* 

Probability theory and statistics:

easy and compact representation of uncertainty

#### Calculus:

easy propagation of uncertainty and estimating parameters of nonlinear relations

# **Timing Estimate for this Course**

- 3 ECTS points = 90 h workload
- Lectures
- = 15 h (1 h per week, 15 weeks) on an average
- Exercises

11

- = 45 h (3 h per week, 15 weeks)
- Exam preparation = 30 h

16

#### **Exercises**

- Mandatory homework assignements
- Nominal 45 points per exercise
  1 point per minute, if perfectly prepared
- Requirement: 50 % of points
- 2 written examinations: Midterm and Endterm
- Time for exercise: 1 week (see deadlines)
- Time for evaluation: 1 week
- Interactive discussion

#### **Table of contents and references**

- The numbers appearing in the slides refer to the German lectures. The letter "V" in the following table of contents refers to "Vorlesungen" not to videos.
- The slides for each video and the complete set of slides contain the references for all videos
- A large part of the videos cover material from the book Förstner/Wrobel (2016). The relevant pages are given in the slides for each video



# Table of contents/Inhalt

13

The numbers appearing in the slides refer to the German lectures. The letter "V" in the following table of contents refers to "Vorlesungen" not to videos. Inhaltsverzeichnis

#### 1 Einführung V1 1-3

Ebe	ene V1 2-5
2.1	Elementare Transformationen in der Ebene
2.2	Homogene Koordinaten von Punkten in 2D und ihre Transformationen V1 2-6
	2.2.1 Homogene Koordinaten
	2.2.2 Elementare Transformation mit homogenen Koordinaten V1 2-8
2.3	Inversion
2.4	Verkettung V1 2-9
2.5	Transformationsgruppen
2.6	Mitgeführte Koordinatensysteme und Koordinatentransformationen . V2 2-1

3	Rot	ationen im $\mathbb{R}^3$	V3	3-20	
	3.1	Grunddefinitionen		V3 3-20	
	3.2	Matrix-repräsentation		V3 3-21	
	3.3	Rotationsmatrizen im $\mathbb{R}^3$ mit Eulerwinkeln		V3 3-22	
		3.3.1 Elementare Rotationen		V3 3-22	
		3.3.2 Verkettete Elementarrotationen		V3 3-23	
		3.3.3 Berechnung von Drehwinkeln aus einer Rotationsmatrix .		V3 3-24	
		3.3.4 Rechtwinklige und Polarkoordinaten auf der Kugel		$V4 \ 3-26$	
	3.4	Rotationmatrizen mit Drehachse und Drehwinkel		V4 3-29	
		3.4.1 Rotationmatrix für gegebene Achse und Winkel		$V4 \ 3-30$	
		3.4.2 Rotationsachse und Drehwinkel für gegebene Rotationsmat	trix	V5 3-32	
	3.5	Exponentialform der Rotationsmatrix		$V5 \ 3-34$	
	3.6	Rotationen mit Quaternionen		V5 3-35	
		3.6.1 Quaternionen		V5 3-35	
		3.6.2 Rotationen mit Quaternionen		V6 3-38	
		3.6.3 Rodriguez Repräsentation		$V6 \ 3-40$	
		3.6.4 Cayley-Repräsentation		V6 3-40	
		na na sense na ser n Na ser na ser n			

3.7	Verket	tung von Rotationen	V6 3-41
	3.7.1	Verkettung mit Quaternionen	V6 3-41
	3.7.2	Verkettung der Rodriguez Parameter	V6 3-42
	3.7.3	Verkettung der Cayley-Parameter	V6 3-42
3.8	Kleine	Rotationen	V6 3-42
	3.8.1	Differentiation	V7 3-44
	3.8.2	Differentiation in der Nähe einer beliebigen Rotationsmatrix .	V7 3-44
	3.8.3	Differentialgleichung für die Drehbewegung	$V7 \ 3-45$
	3.8.4	Unsichere Rotationen und ihre Verkettung	V7 3-47
3.9	Bezieh	ungen zwischen den Repräsentationen für Rotationen	V7 3-49
3.10	Rotati	onen aus Paaren von Vektoren	V7 3-50
	3.10.1	Rotation aus zwei Triplets orthonormaler Vektoren	$V7 \ 3-50$
	3.10.2	Rotation aus zwei Triplets von Vektoren	$V7 \ 3-51$
	3.10.3	Rotation aus zwei Paaren von Vektoren	V7 3-51
	3.10.4	Rotation aus einem Vektorpaar	V7 3-51
	3 10 5	Approximation einer Matrix durch eine Rotationsmatrix	V7 3-52

4	Rät	mliche Bewegung und Ähnlichkeitstransformation V8	4-53
	4.1	Räumliche Ähnlichkeitstransformation	V8 4-53
	4.2	Räumliche Bewegung	V8 4-54
		4.2.1 Räumliche Bewegung als spezielle Ähnlichkeitstransformation	V8 4-54
		4.2.2 Räumliche Bewegung als Schraubbewegung (optional)	V8 4-55
	4.3	Kleine Bewegungen und Ähnlichkeitstransformationen	V8 4-55
	4.4	Denavit-Hartenberg Parameter für Roboterarme	V9 4-60
	4.5	Kinematische Ketten	V9 4-62
5	Sch	ätzung der Parameter von Transformationen V10	5-65 V10 5 65
5	Sch 5.1	ätzung der Parameter von Transformationen  V10    Aufgabenstellung und Lösungsansatz  5.1.1	5-65 V10 5-65 V10 5-67
5	Sch 5.1	ätzung der Parameter von Transformationen  V10    Aufgabenstellung und Lösungsansatz	5-65 V10 5-65 V10 5-67 V10 5-73
5	Sch 5.1	ätzung der Parameter von Transformationen  V10    Aufgabenstellung und Lösungsansatz     5.1.1  Estimation theory     5.1.2  Nicht-lineares Gauß-Markoff-Modell     5.1.3  Mathematisches Modell für die Helmerttransformation	5-65 V10 5-65 V10 5-67 V10 5-73 V10 5-74
5	Sch 5.1 5.2	ätzung der Parameter von Transformationen  V10    Aufgabenstellung und Lösungsansatz     5.1.1  Estimation theory     5.1.2  Nicht-lineares Gauß-Markoff-Modell     5.1.3  Mathematisches Modell für die Helmerttransformation     Direkte LS-Schätzung für die Ähnlichkeitstransformation	5-65 V10 5-65 V10 5-67 V10 5-73 V10 5-74 V11 5-77
5	Sch 5.1 5.2	ätzung der Parameter von Transformationen  V10    Aufgabenstellung und Lösungsansatz     5.1.1  Estimation theory     5.1.2  Nicht-lineares Gauß-Markoff-Modell     5.1.3  Mathematisches Modell für die Helmerttransformation     Direkte LS-Schätzung für die Ähnlichkeitstransformation     5.2.1  Bestimmung der Translation	5-65 V10 5-65 V10 5-67 V10 5-73 V10 5-74 V11 5-77 V11 5-78
5	Sch 5.1 5.2	ätzung der Parameter von Transformationen    V10      Aufgabenstellung und Lösungsansatz       5.1.1    Estimation theory       5.1.2    Nicht-lineares Gauß-Markoff-Modell       5.1.3    Mathematisches Modell für die Helmerttransformation       Direkte LS-Schätzung für die Ähnlichkeitstransformation        5.2.1    Bestimmung der Translation       5.2.2    Bestimmung des Maßstabsfaktors	<b>5-65</b> V10 5-65 V10 5-67 V10 5-73 V10 5-74 V11 5-77 V11 5-78 V11 5-78

	5.3	Beste Schätzung der Parameter der Helmert-Transformation V12 5-84	
		5.3.1 Ebene Helmert-Transformation	
		5.3.2 Räumliche Helmert-Transformation	
	5.4	Beurteilung der Ausgleichung	
		5.4.1 Die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter V14 5-99	
		5.4.2 Der Varianzfaktor	
		5.4.3 Checking the Implementation of the Estimation V14 5-103	
		5.4.4 Genauigkeit des Ergebnisses im reduzierten Modell V14 5-106	
		5.4.5 Genauigkeit des Ergebnisses im Original-Modell V14 5-109	
6	Beh	handlung von Ausreißern V15 6-110	
6	<b>Beh</b> 6.1	handlung von Ausreißern V15 6-110 Zum Begriff des Ausreißers bei Ausgleichungen V15 6-110	
6	<b>Beh</b> 6.1 6.2	Mandlung von Ausreißern  V15 6-110    Zum Begriff des Ausreißers bei Ausgleichungen  V15 6-110    Das Problem und die Struktur der Lösungsverfahren  V15 6-111	
6	Beh 6.1 6.2 6.3	handlung von AusreißernV15 6-110Zum Begriff des Ausreißers bei AusgleichungenV15 6-110Das Problem und die Struktur der LösungsverfahrenV15 6-111Vollständige SucheV15 6-113	
6	Beh 6.1 6.2 6.3 6.4	handlung von AusreißernV15 6-110Zum Begriff des Ausreißers bei AusgleichungenV15 6-110Das Problem und die Struktur der LösungsverfahrenV15 6-111Vollständige SucheV15 6-113RANSACV15 6-114	
6	Beh 6.1 6.2 6.3 6.4	handlung von AusreißernV15 6-110Zum Begriff des Ausreißers bei AusgleichungenV15 6-110Das Problem und die Struktur der LösungsverfahrenV15 6-111Vollständige SucheV15 6-113RANSACV15 6-1146.4.1MotivationV15 6-114	
6	Beh 6.1 6.2 6.3 6.4	handlung von AusreißernV15 6-110Zum Begriff des Ausreißers bei AusgleichungenV15 6-110Das Problem und die Struktur der LösungsverfahrenV15 6-111Vollständige SucheV15 6-113RANSACV15 6-1146.4.1MotivationV15 6-1146.4.2Das VerfahrenV15 6-114	
6	<b>Beh</b> 6.1 6.2 6.3 6.4	handlung von AusreißernV15 6-110Zum Begriff des Ausreißers bei AusgleichungenV15 6-110Das Problem und die Struktur der LösungsverfahrenV15 6-111Vollständige SucheV15 6-113RANSACV15 6-1146.4.1MotivationV15 6-1146.4.2Das VerfahrenV15 6-1146.4.3Minimallösung für räumliche TransformationenV15 6-118	

#### **References of video series**

- Arun, K. S., T. S. Huang, and S. B. Blostein (1987). Least-Squares Fitting of Two 3D Point Sets. IEEE T-PAMI 9 (5), 698-700.
- Bishop, C. (2006). Pattern Recognition and Machine Learning. Springer.
- Boyd, S. and L. Vandenberghe (2004). Convex optimization. Cambridge University Press.
- Cayley, A. (1846). Sur quelques proprétés des déterminants gauches. Journal für die reine und angewandte Mathematik 32, 119-123
- Cover, T. and J. A. Thomas (1991). Elements of Information Theory. John Wiley & Sons.
- H. S. M. Coxeter (1946): Quaternions and Reflections, The American Mathematical Monthly, 53(3), 136-146

Fallat, S. M. and M. J. Tsatsomeros (2002). On the Cayley Transform of Positivity Classes of Matrices. Electronic Journal of Linear Algebra 9, 190-196.

21

23

Fischler, M. A. and R. C. Bolles (1981). Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. Communications of the ACM 24 (6), 381-395. Förstner, W. and B. P. Wrobel (2016). Photogrammetric Computer Vision Statistics, Geometry, Orientation and Reconstruction. Springer. Horn, B. K. B. (1987). Closed-form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions. Optical Soc. of America. Howell, T. D. and J.-C. Lafon (1975). The Complexity of the Quaternion Product. Technical Report TR75-245, Cornell University. Kanatani, K. (1990). Group Theoretical Methods in Image Understanding. New York: Springer. Koch, K.-R. (1999). Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. (2nd ed.). Springer. Li, S. Z. (2000). Markov random field modeling in computer vision. Springer. McGlone, C. J., E. M. Mikhail, and J. S. Bethel (2004). Manual of Photogrammetry (5th ed.). Maryland, USA: American Society of Photogrammetry and Remote Sensina.

Mikhail, E. M. and F. Ackermann (1976). Observations and Least Squares. University Press of America Mikhail, E. M., J. S. Bethel, and J. C. McGlone (2001). Introduction to Modern Photogrammetry. Wiley. Palais, B. and R. Palais (2007). Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation. J. fixed point theory appl. 2, 215-220. Raguram, R., O. Chum, M. Pollefeys, J. Matas, and J.-M. Frahm (2013). USAC: A Universal Framework for Random Sample Consensus. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 35 (8), 2022-2038. Rao, R. C. (1973). Linear Statistical Inference and Its Applications. New York: Wiley. Rodriguez, O. (1840). Des lois géometriques qui regissent les deplacements d'un système solide independament des causes qui peuvent les produire. Journal de mathématiques pures et appliquées 1 (5), 380440. Sansò, F. (1973). An Exact Solution of the Roto-Translation Problem. Photogrammetria 29 (6), 203-206. Vaseghi, S. V. (2000). Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction. Wiley. Weber, M. (2003). Rotation between two vectors. Personal communication, Bonn.