

# Direkte Bestimmung von Zylindern aus 3D-Punkten ohne Nutzung von Oberflächennormalen

Christian BEDER und Wolfgang FÖRSTNER

## Zusammenfassung

Die automatische Extraktion von Zylindern aus 3D-Punktwolken ist von zentraler Bedeutung bei der Auswertung von Laserscannerdaten insbesondere bei Industrieanlagen. Das robuste Schätzverfahren RANSAC benötigt direkte Lösungen aus so wenig Datenpunkten wie möglich, um effizient zu arbeiten. Wir werden die algebraischen Bedingungen, die quadratische Formen erfüllen müssen, um einen Zylinder darzustellen, analysieren und verschiedene Verfahren für die Lösung dieses Problems vorstellen. Insbesondere werden wir eine minimale Lösung mit nur fünf 3D Punkten präsentieren. Anders als andere Ansätze benötigen wir keine Oberflächennormalen, deren Bestimmung im Allgemeinen schwierig ist

## 1 Einleitung

Zylinder spielen eine wichtige Rolle in der Geometrie von Industrieanlagen. Bei deren Vermessung kommen vor allen Dingen Laserscanner zum Einsatz, welche zunächst „nur“ dichte 3D Punktwolken liefern. Für Aufgabenstellungen, die über die Visualisierung hinausgehen, ist es von entscheidender Bedeutung, die Punktdaten in Primitive wie z.B. Ebenen und Zylinder zu segmentieren. Während für die Visualisierung die Oberflächennormalen relativ wichtig sind, kann man für die modellgestützte Segmentierung im Prinzip auf sie verzichten. Dies ist insbesondere von Vorteil, da Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten zu ermitteln (vgl. TANG & MEDIONI (2002)) insbesondere bei registrierten Daten aus vielen Einzelmessungen ein schwieriges Problem und somit eine unnötige potenzielle Fehlerquelle darstellt.

Eine Übersicht über klassische Verfahren für die Segmentierung auf der Basis von Dreiecksnetzen findet sich z.B. bei PETITJEAN (2002) oder bei HOPPE & AL. (1994), wobei hier nicht explizit auf Zylinder eingegangen wurde. Die Benutzung von Oberflächennormalen für die Extraktion von Zylindern aus Punktwolken mit Hilfe von RANSAC (vgl. CHAPERON & GOULETTE (2001)), Gruppierung (vgl. WINKELBACH & AL. (2003)) oder Hough-Transformation (vgl. VOSSELMAN & AL. (2004) und PETERNELL & AL. (2003)) ist weit verbreitet. Die hier präsentierte Lösung (vgl. auch BEDER & FÖRSTNER (2006)) kommt ohne Oberflächennormalen aus und erlaubt es mit Hilfe eines RANSAC-Verfahrens Zylinder direkt aus einer 3D Punktwolke zu extrahieren, ohne in dieser zunächst Nachbarschaftsbeziehungen zu etablieren.

Im Gegensatz zu ROTH & LEVINE (1990), die polynomielle Basen für die Beschreibung von Objekten benutzen, welche für Zylinder nicht existieren, verwenden wir die algebraischen Bedingungen, die eine quadratische Form erfüllen muss, um einen Zylinder darzustellen. Zunächst werden wir die Bedingungen für die praktisch relevanten Spezialfälle von

Zylinder parallel zu bekannten Geraden bzw. Ebenen beschreiben und schließlich für allgemeine Zylinder. Anschließend zeigen wir, wie man die resultierenden direkten Lösungen für die effiziente modellgestützte Segmentierung von „rohen“ 3d Punktwolken mit Hilfe des RANSAC-Verfahrens einsetzen kann.

## 2 Algebraische Bedingungen für Zylinder

### 2.1 Zylinder parallel zu einer Achse

Für den Fall, dass der Zylinder parallel zu einer bekannten Achse ist, kann man o.B.d.A. annehmen, dass es sich um die Z-Achse handelt, so dass alle Punkte auf dem Zylinder in der Projektion auf die XY-Ebene die Kreisgleichung

$$(X - s)^2 + (Y - t)^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

erfüllen müssen. Diese Bedingung ist zunächst quadratisch in den unbekanntem Parametern. Benutzt man jedoch die Substitution (vgl. BOOKSTEIN (1979))

$$u = s^2 + t^2 - r^2 \quad (2)$$

erhält man mit drei Punkten die drei linearen Bedingungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} 2X_1 & 2Y_1 & -1 \\ 2X_2 & 2Y_2 & -1 \\ 2X_3 & 2Y_3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1^2 + Y_1^2 \\ X_2^2 + Y_2^2 \\ X_3^2 + Y_3^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

welche eine sehr einfache Bestimmung der Zylinderparameter ermöglichen.

### 2.2 Zylinder parallel zu einer Ebene

Ist der Zylinder parallel zu einer bekannten Ebene, o.B.d.A. der XY-Ebene, dann muss eine Rotation um die Z-Achse existieren, so dass die Projektion in die YZ-Ebene wieder die Kreisgleichung erfüllt. Die unbekanntem Rotation um die Z-Achse kann man mit Hilfe des Sinus und Kosinus, welche die Bedingung

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (4)$$

erfüllen, beschreiben, so dass die rotierten Punkte darstellbar sind als

$$\mathbf{X}'_i = \begin{bmatrix} aX_i + bY_i \\ -bX_i + aY_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

Setzt man diese rotierten Punkte in die Kreisgleichung ein, so erhält man

$$(-bX_i + aY_i)^2 + Z_i^2 - 2(-bX_i + aY_i)s - 2Z_i t + (s^2 + t^2 - r^2) = 0 \quad (6)$$

oder mit der Substitution wie in (2) für vier Punkte das homogene Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} (-bX_1 + aY_1)^2 + Z_1^2 - 2(-bX_1 + aY_1)s - 2Z_1 t & 1 \\ (-bX_2 + aY_2)^2 + Z_2^2 - 2(-bX_2 + aY_2)s - 2Z_2 t & 1 \\ (-bX_3 + aY_3)^2 + Z_3^2 - 2(-bX_3 + aY_3)s - 2Z_3 t & 1 \\ (-bX_4 + aY_4)^2 + Z_4^2 - 2(-bX_4 + aY_4)s - 2Z_4 t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Diese Matrix ist also singular, genau dann wenn alle vier Punkte in der Projektion kozyklisch sind. Also erhält man die gesuchte Rotation, indem man die gemeinsamen Nullstellen der Determinante und der Bedingung (4) berechnet. Diese Determinante ist ein bivariates Polynom 3. Grades, welches sich sehr einfach wie von BEDER & FÖRSTNER (2006) beschrieben lösen lässt. Ist die Rotation schließlich bekannt, erhält man die restlichen Parameter wie in Kapitel 2.1 beschrieben.

### 2.3 Allgemeine Zylinder

Der Zylinder ist ein Spezialfall einer allgemeinen quadratischen Form, welche sich mit Hilfe von homogenen Koordinaten  $X$  und einer homogenen, symmetrischen Matrix  $C$  schreiben lässt als

$$X^T C X = 0 \quad (8)$$

Wieder gilt, dass eine Ebene existieren muss, so dass die Projektionen aller Punkte auf diese Ebene kozyklisch sind. Wäre diese Ebene wie in Kapitel 2.1 die  $XY$ -Ebene, so müsste wieder die Kreisgleichung (1) erfüllt sein, was sich in der obigen Repräsentation ausdrücken lässt als

$$C' = \lambda \begin{bmatrix} D' & d' \\ d'^T & -r^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

mit den Teilmatrizen

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad d' = \begin{bmatrix} -s \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Da im Allgemeinen die Projektionsebene nicht bekannt ist, muss der Zylinder entsprechend bewegt werden mit der unbekanntem Bewegung

$$M = \begin{bmatrix} R & t \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Der allgemeine Zylinder ist also repräsentierbar durch eine Matrix der Form

$$\begin{aligned}
 C &= M^{-T} C' M^{-1} \\
 &= \lambda \begin{bmatrix} RD'R^T & -RD'R^T t + Rd' \\ -t^T RD'R^T + d'^T R^T & t^T RD'R^T t - 2t^T Rd' - r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & d \\ d^T & d \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Aus dieser Darstellung lassen sich nun zehn linear unabhängige algebraische Bedingungen ableiten. Zunächst sieht man in (12) und (10) sofort, dass D singular ist und zwei identische Eigenwerte besitzt. Diese Eigenschaft lässt sich analog zur essentiellen Matrix (vgl. FAUGERAS (1993), S.254) algebraisch durch die zehn Bedingungen

$$|D| = 0 \tag{13}$$

$$2DD^T D - \text{tr}_{3 \times 3} DD^T D = 0 \tag{14}$$

darstellen. Da D symmetrisch ist, liefert (14) nur 6 unabhängige Bedingungen. Obwohl (13) direkt aus (14) ableitbar ist, sind die Bedingungen im Allgemeinen dennoch linear unabhängig, so dass man insgesamt 7 linear unabhängige Bedingungen erhält. Weiterhin gilt, dass

$$Dd = \lambda^2 RD'R^T (-RD'R^T t + Rd') = \lambda d \tag{15}$$

Also ist d ein Eigenvektor von D. Somit erhält man drei weitere linear unabhängige Bedingungen

$$[d]_{\times} Dd = 0 \tag{16}$$

Zusammenfassend stellen also (13), (14) und (16) zehn linear unabhängige Bedingungen für symmetrische, homogene Matrizen dar, damit diese einen Zylinder repräsentieren. Im folgenden werden verschiedene Ansätze vorgeschlagen, wie man diese Bedingungen nutzen kann, um aus 3D Punkten Zylinder zu berechnen.

### 2.3.1 Zylinder aus 9 Punkten

Sind neun Punkte gegeben, so reicht Gleichung (8) vollständig aus, um ein homogenes lineares Gleichungssystem aufzustellen, zu lösen und somit alle Elemente von C zu bestimmen.

### 2.3.2 Zylinder aus 8 Punkten

Sind nur acht Punkte gegeben, so ist der Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems aus Bedingung (8) zwei-dimensional. Die Lösung ist also

$$C = xC_1 + C_2 \tag{17}$$

für ein unbekanntes x. Für die Bestimmung von x nutzt man nun die zusätzliche Bedingung (13), welche ein Polynom 3. Grades in x ist (vgl. HARTLEY & ZISSERMAN (2000), S. 264).

### 2.3.3 Zylinder aus 7 Punkten

Bei sieben Punkten ist der Lösungsraum aus Bedingung (8) drei-dimensional, also

$$C = xC_1 + yC_2 + C_3 \quad (18)$$

Die Gleichungen (13), (14) und (16) sind nun zehn Polynome 3. Grades in den beiden Unbekannten  $x$  und  $y$ . Ein lineares Lösungsverfahren hierfür findet sich bei PHILIP (1996).

### 2.3.4 Zylinder aus 6 Punkten

Im Fall von sechs Punkten ist der Lösungsraum aus Bedingung (8) schließlich vier-dimensional, d.h.

$$C = xC_1 + yC_2 + zC_3 + C_4 \quad (19)$$

Daher sind Gleichungen (13), (14) und (16) nun zehn Polynome 3. Grades in drei Unbekannten. Wie von STEWENIUS (2006) und BEDER & FÖRSTNER (2006) gezeigt, lässt sich dieses Problem mit Hilfe von Gröbnerbasen auf ein Eigenwertproblem zurückführen und sehr effizient lösen.

### 2.3.5 Zylinder aus 5 Punkten

Die Bestimmung eines Zylinders aus fünf Punkten funktioniert unseres Wissens nicht nach dem obigen Schema. Stattdessen bestimmen wir ähnlich wie in Kapitel 2.2 zunächst die Richtung der Zylinderachse. Dazu rotiert man die Zylinderachse, so dass sie in Richtung der  $Z$ -Achse zeigt, also die Projektionen aller Punkte in die  $XY$ -Ebene kozyklisch sind. Mit Hilfe von Quaternionen lässt sich diese Rotation schreiben als

$$R(a, b) = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 1 + a^2 - b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1 - a^2 + b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1 - a^2 - b^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Explizit sind die Koordinaten der rotierten Punkte nun also

$$\begin{bmatrix} X'_i(a, b) \\ Y'_i(a, b) \\ Z'_i(a, b) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} \begin{bmatrix} X_i a^2 - X_i b^2 + 2Y_i ab + 2Z_i b + X_i \\ -Y_i a^2 + Y_i b^2 + 2X_i ab - 2Z_i a + Y_i \\ -Z_i a^2 - Z_i b^2 + 2Y_i a - 2X_i b + Z_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

Substituiert man wieder mit Gleichung (2), so ist die Kozirkularität der fünf Punkte in der  $XY$ -Ebene darstellbar als homogenes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} X_1'^2(a, b) + Y_1'^2(a, b) & -2X_1'(a, b) & -2Y_1'(a, b) & 1 \\ X_2'^2(a, b) + Y_2'^2(a, b) & -2X_2'(a, b) & -2Y_2'(a, b) & 1 \\ X_3'^2(a, b) + Y_3'^2(a, b) & -2X_3'(a, b) & -2Y_3'(a, b) & 1 \\ X_4'^2(a, b) + Y_4'^2(a, b) & -2X_4'(a, b) & -2Y_4'(a, b) & 1 \\ X_5'^2(a, b) + Y_5'^2(a, b) & -2X_5'(a, b) & -2Y_5'(a, b) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = H(a, b) \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ t \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (22)$$

Jede der fünf 4x4-Submatrizen von  $H(a,b)$  muss nun singular sein. Die fünf Determinanten sind gebrochen rationale Funktionen in den Rotationsparametern  $a$  und  $b$ . Betrachtet man nur die Zähler der Determinanten, so kann man sehen, dass es sich um bivariate Polynome 6. Grades handelt. Bei BEDER & FÖRSTNER (2006) wird gezeigt, wie man die gemeinsamen Nullstellen mit Hilfe von Bernsteinpolynomen effizient berechnet. Kennt man nun die Richtung der Zylinderachse, lassen sich die restlichen Zylinderparameter wie in Kapitel 2.1 gezeigt berechnen.

### 3 Robuste Schätzung und Segmentierung mit RANSAC

Verfahren für die direkte Bestimmung von Objekten aus einer minimalen Anzahl von Beobachtungen sind vor allen Dingen für die robuste Schätzung relevant. Das RANSAC-Verfahren von FISCHLER & BOLLES (1981) arbeitet dazu wie folgt:

1. Bestimme eine zufällige Teilmenge von  $s$  Punkten und berechne daraus den Zylinder mit einem der Verfahren aus Kapitel 2.
2. Bestimme die Teilmenge  $S_i$  von Punkten, deren Distanz vom geschätzten Zylinder unterhalb einer gegebenen Schranke liegt.
3. Wiederhole die beiden Schritte  $N$  mal.
4. Wähle die größte Teilmenge  $S_i$  aus und schätze den Zylinder statistisch optimal aus diesen Punkten. Nutze hierzu die direkte Lösung als initiale Näherung.

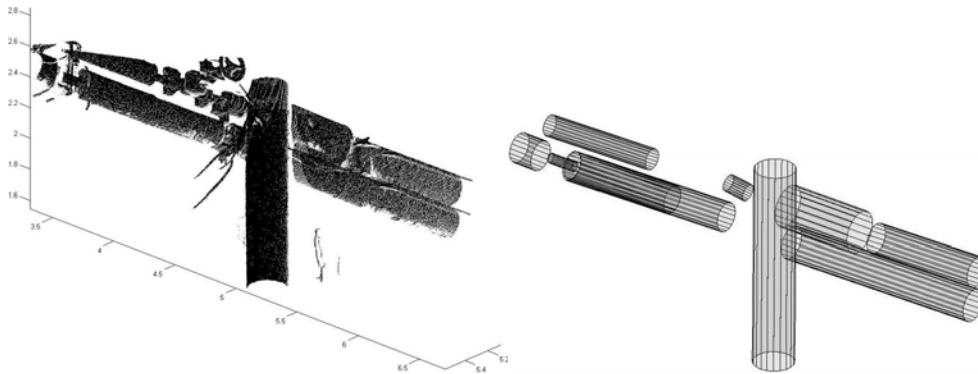
Zwei Faktoren bestimmen die Laufzeiten dieses Verfahrens. In jeder Iteration muss der Zylinder neu berechnet werden, so dass effiziente direkte Methoden hier unbedingt den iterativen Verfahren vorzuziehen sind. Die Anzahl der Iterationen lässt sich wie folgt bestimmen (vgl. HARTLEY & ZISSERMANN (2000), S. 104): Um mit Wahrscheinlichkeit  $p$  sicherzustellen, dass mindestens einmal eine ausreißerfreie Teilmenge aus  $s$  Punkten gezogen wird, wobei  $\epsilon$  der Anteil an Ausreißern in den Daten ist, benötigt man mindestens

$$N = \frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\epsilon)^s)} \quad (23)$$

Iterationen. Insbesondere ist die Anzahl der Iterationen exponentiell von der Größe der Teilmenge  $s$  abhängig. Konkret bedeutet das, dass wenn man von einem Ausreißeranteil von  $\epsilon=50\%$  ausgeht und die gewünschten Erfolgswahrscheinlichkeit  $p=99\%$  beträgt, so benötigt man für  $s=9$  Punkte  $N=2356$  Iterationen, für  $s=8$  Punkte  $N=1177$  Iterationen, für  $s=7$  Punkte  $N=588$  Iterationen, für  $s=6$  Punkte  $N=293$  Iterationen und für  $s=5$  Punkte  $N=146$  Iterationen. Wie man sehen kann ist der Laufzeitunterschied deutlich, wenn man mit Ausreißern in den Daten rechnen muss und verschärft sich, je höher die Ausreißerquote ist. Das häufig vorgebrachte Argument man habe beim Laserscanner sowieso immer ausreichend viele Punkte zur Verfügung setzt daher vollständig und fehlerfrei segmentierte sowie ausreißerfreie Daten voraus, was zur Zeit nur durch aufwendige und teure semi-automatische Auswerteverfahren erreicht werden kann.

Das RANSAC-Verfahren lässt sich auch für die modellgestützte Segmentierung von Punktwolken einsetzen. Betrachtet man alle Punkte die nicht zum selben Segment gehören

als Ausreißer einer Schätzung, so kann man wie folgt verfahren: Man schätzt zunächst robust den dominantesten Zylinder in der Punktwolke und entferne alle zu diesem gehörende Punkte. Diesen Vorgang wiederholt man, bis alle Zylinder gefunden wurden. Da RANSAC nur dann effizient mit sehr hohen Ausreißerraten umgehen kann, wenn die Teilmengengröße klein genug ist, sollte für diese Anwendung unbedingt der 5-Punkte-Algorithmus benutzt werden. Abbildung 1 zeigt das Ergebnis für einen Datensatz bestehend aus mehreren Rohren mit ca. 170.000 Punkten ohne bekannte Nachbarschaftsbeziehungen.



**Abb.1:** 3D Punktwolke und die aus ihr automatisch extrahierten Zylinder.  
Freundlicherweise zur Verfügung gestellt von G. Vosselman und T. Rabbani.

## 4 Zusammenfassung

Wir haben algebraische Bedingungen für quadratische Formen abgeleitet, welche Zylinder repräsentieren. Daraus ergeben sich effiziente direkte Lösungen für die Bestimmung von Zylindern aus 3D Punkten einschließlich der wichtigen Spezialfälle von Zylindern parallel zu bekannten Geraden bzw. Ebenen und dem minimalen Fall eines allgemeinen Zylinders aus fünf Punkten. Vor allen Dingen benötigen wir keine Oberflächennormalen, deren Bestimmung insbesondere bei registrierten Punktwolken aus mehreren Messungen eine schwierige und daher potentiell fehlerträchtige Aufgabe darstellt. Die präsentierten direkten Verfahren ermöglichen eine effiziente automatische Segmentierung von 3D Punktwolken mit Hilfe des RANSAC-Verfahrens. Ferner lassen sich die direkten Lösungen einsetzen, um beispielsweise Näherungswerte für optimale Schätzungen zu erzeugen sowie semi-automatische Verfahren zur Zylinderextraktion zu unterstützen.

## 5 Literatur

Beder, C. & Förstner, W. (2006): *Direct Solutions for Computing Cylinders from Minimal Sets of 3D Points*. Proceedings of the European Conference on Computer Vision, noch nicht erschienen

- Chaperon, T. & Goulette, F. (2001): *Extracting cylinders in full 3d data using random sampling method and the Gaussian image*. Proceedings of the Vision Modeling and Visualization Conference, S. 35-42
- Bookstein, F. L. (1979): *Fitting conic sections to scattered data*. Computer Graphics and Image Processing, 9(1), S. 56-71
- Faugeras, O. (1993): *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*. MIT Press
- Fischler, M. A. & Bolles, R. C. (1981): *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography*. Communications of the Academy of Computing Machinery, 24(6), S. 381-395
- Fischler, M. A. & Bolles, R. C. (1981): *A RANSAC-based approach to model fitting and its application to finding cylinders in range data*. Proceedings of the International Joint Conference on Artificial Intelligence, S. 637-643
- Hartley, R. & Zisserman, A. (2000): *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press
- Peternell, M. & Pottmann, H. & Steiner, T. (2003): *Hough transform and Laguerre geometry for the recognition and reconstruction of special 3d shapes*. Technical Report, Institute of Geometry, Vienna University of Technology, Austria
- Petitjean, S. (2002): *A survey of methods for recovering quadrics in triangle meshes*. ACM Computing Surveys, 34(2), S. 211-262
- Philip, J. (1996): *A non-iterative algorithm for determining all essential matrices corresponding to five point pairs*. Photogrammetric Record, 15(88), S. 589-599
- Roth, G. & Levine, M. D. (1990): *Segmentation of geometric signals using robust fitting*. Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition, S. 826-831
- Stewenius, H. & Engels, C. & Nister, D. (2006): *Recent developments on direct relative orientation*. ISPRS Journal, noch nicht erschienen
- Tang, C. K. & Medioni, G. (2002): *Curvature-augmented tensor voting for shape inference from noisy 3d data*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 24(6), S. 858-864
- Vosselman, G. & Gorte, B. G. H. & Sithole, G. & Rabbani, T. (2004): *Recognizing structure in laser scanner point clouds*. International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Science, 46, S. 33-38
- Winkelbach, S. & Westphal, R. & Gössling, T. (2003): *Pose estimation of cylindrical fragments for semi-automatic bone fracture reduction*. Proceedings of the DAGM Symposium, S. 566-573